ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option technologique

MATHÉMATIQUES

Année 2004

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE 1

L'exercice se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout x réel, $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$.

Partie 1 : Etude d'une fonction g intermédiaire.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geqslant 0, \qquad g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' de g et en donner son signe sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire les variations de la fonction g et montrer que : $\forall t \geqslant 0,\ g(t) \leqslant 0$.

Partie 2 : Etude de la fonction f

1. Démontrer que l'on a , pour tout x réel : $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$
2. Etudier alors les variations de la fonction f.
3. Sachant que $\ln 2 \simeq 0.69$ et que $\dfrac{\ln(1+e)}{e} \simeq 0.48$, montrer que l'on a,pour tout x de l'intervalle $[0,1]$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Justifier que pour tout x de $[0,1]$:
$$\left|f'(x)\right| \leqslant |g(e)|$$
2. On considère la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x) = f(x) - x$.
   (a) Montrer que h est une fonction strictement décroissante sur $[0,1]$.
   (b) Prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$.
   (c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0,1]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel :
$$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$
4. Montrer que, pour tout n entier naturel :
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |g(e)| \,.\, |u_n - \alpha|$$
   Ainsi que :
$$|u_n - \alpha| \leqslant |g(e)|^n$$
5. Sachant que $|g(e)| < 0.6$, déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère les suites réelles u et v définies par leur premier terme $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rl} u_{n+1} = & -\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}v_n - \frac{3}{4} \\ v_{n+1} = & u_n + \frac{5}{4}v_n - \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

1. On pose : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} w_n & = & u_n + v_n + 6 \\ t_{n+1} & = & u_n + \frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2} \end{array} \right.$

   (a) Montrer que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définies sont des suites géométriques.

   (b) Déterminer w_n et t_n en fonction de l'entier n.

   (c) Montrer que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et donner leur limite.

   (d) En déduire la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner leur limite.

2. On note A la matrice carrée réelle d'ordre 2, et B la matrice unicolonne réelle, définies par :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + B.$$

   (a) Expliciter A et B.

   (b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   Démontrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

   (c) Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

   (d) I étant la matrice carrée unité d'ordre 2, montrer que :

$$P(D - I)P^{-1} = A - I$$

   (e) En déduire que la matrice $A - I$ est inversible et déterminer son inverse $(A - I)^{-1}$.

   (f) Résoudre l'équation :

$$(A - I)X + B = 0$$

   où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est la matrice réelle inconnue.

   (g) Vérifier enfin que : $X = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \end{pmatrix}$

EXERCICE 3

Chaque jour, une entreprise envoie un colis. Elle utilise les services des sociétés de transport A ou B.
La probabilité pour que la société A livre le colis avec retard est de 0.1, alors que la probabilité pour que la société B livre avec retard est de 0.2. On suppose les retards successifs indépendants. On se propose d'étudier diverses situations liées à ces données. Les hypothèses données pour une situation ne sont valables que pour une seule situation.

Partie 1 :Situation 1

L'entreprise décide d'utiliser la société A pendant n jours consécutifs. (n étant un entier naturel non nul). On note X la variable aléatoire égale au nombre de jours où le colis arrive en retard.

1. Déterminer la loi de X.
2. Donner la valeur de l'espérance $E(X)$ de X.
3. La société A fait payer à l'entreprise un prix de 8 euros par colis livré sans retard, la livraison étant gratuite pour tout colis livré avec retard. On note W le prix payé par l'entreprise sur une période de n jours.
   (a) Exprimer W en fonction de X.
   (b) En déduire le prix moyen payé par l'entreprise sur la période de n jours.

Partie 2 : Situation 2

Pour des raisons tarifaires,l'entreprise décide d'utiliser la société B dans 60% des cas, et la société A dans 40% des cas.

1. Un jour donné, calculer la probabilité que le colis arrive en retard.
2. Un jour donné, le colis arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait été livré par la société A ?

Partie 3 : Situation 3

L'entreprise tente l'expérience suivante : à partir d'un jour donné que l'on notera le jour 1, elle décide d'utiliser la société A, jusqu'à ce qu'un colis soit livré avec retard. A partir du jour suivant, elle utilisera la société B. On note Y la variable aléatoire représentant le numéro du jour où pour la première fois l'entreprise utilise la société B.

1. Justifier que l'ensemble des valeurs prises par Y est égal à $\mathbb{N}^\times \setminus \{1\}$
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^\times \setminus \{1\}, \quad P(Y=k) = (0.1)(0.9)^{k-2}$
3. Vérifier par le calcul que : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(Y=k) = 1$.

Partie 4 : Situation 4

On suppose que la masse d'un colis, exprimée en kilogrammes, est une variable aléatoire M qui suit une loi exponentielle de paramètre 2.

1. Rappeler l'expression d'une densité de M, ainsi que l'expression de sa fonction de répartition.
2. Donner la valeur de l'espérance de M.
3. Déterminer les valeurs exactes des probabilités suivantes :
$$P(M \leqslant 1.5), \qquad P(M \geqslant 2), \qquad P(1.5 \leqslant M \leqslant 2)$$
4. Pour calculer le prix d'envoi d'un colis en euros,la société multiplie la masse en kilogramme du colis par deux, auquel elle ajoute une taxe forfaitaire de 3 euros. On note E, le prix d'envoi d'un colis.
   (a) Exprimer E en fonction de M.
   (b) Déterminer la fonction de répartition G de E.