ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option technologique

MATHÉMATIQUES

Année 2005

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE 1

On note φ la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x$$

1. Etudier le signe du quotient $\dfrac{1+x}{1-x}$ suivant les valeurs du réel x.
2. Justifier que l'ensemble de définition de φ est l'intervalle $I =]-1, 1[$.
3. Montrer que φ est impaire.
4. Démontrer que pour x dans I,
$$\varphi'(x) = 2\frac{x^2}{1-x^2}$$
5. En déduire le tableau de variation de φ en précisant les limites de φ en 1 et en -1.
6. (a) Quel est le signe de $\varphi(x)$ sur l'intervalle I ?
   (b) Calculer la dérivée seconde de φ sur I.
   (c) En déduire que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \qquad 0 \leqslant \varphi'(x) \leqslant \frac{2}{3}$$
   (d) Etudier la convexité de φ.
7. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$
   (a) On donne $\ln 3 < 1,1$.
   Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$ alors $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$
   (b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n|$$
   Puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\right]^n$$
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 2

On considère les matrices à coefficients réels P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{4}(I+P)$$

où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

1. Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P.
2. Calculer les produits $(4I - P)\,Q$ et $Q(4I - P)$. Qu'en concluez-vous pour la matrice Q ?
3. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n et b_n tels que :

$$Q^n = a_n I + b_n P$$

   Les suites (a_n) et (b_n) vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{4} a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{4} a_n + b_n \end{cases}$$
$$\text{avec } a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0$$

4. En déduire a_n en fonction de n.
5. Montrer que pour tout entier n, non nul :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_n$$

6. En déduire que pour tout entier n :
$$b_n = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{4^n})$$
7. Donner alors l'expression, sous forme matricielle, de Q^n en fonction de l'entier n.
8. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{4}\,(2x_n + y_n + z_n) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{4}\,(x_n + 2y_n + z_n) \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{4}\,(x_n + y_n + 2z_n) \end{cases}$$
$$\text{avec } x_0 = 1,\ y_0 = z_0 = 0$$

   On pose alors :

$$U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer U_0, U_1.
   (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = QU_n$$

   (c) Puis montrer que, pour tout entier naturel n :

$$U_n = Q^n U_0$$

   (d) En déduire l'écriture de x_n, y_n, z_n en fonction de n, puis leur limite lorsque n tend vers plus l'infini.

EXERCICE 3

Une entreprise de sondage interroge des consommateurs sur l'utilisation d'un produit commercial A.
La probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi les utilisateurs du produit A s'estime satisfaite de ce produit est de $\frac{2}{3}$.
On admet que les réponses des consommateurs sont indépendantes les unes des autres.

1. L'enquête est effectuée auprès d'un échantillon de 20 consommateurs du produit A. On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes satisfaites du produit A.

   (a) Définir la loi de X. Donner l'espérance mathématique et la variance de X .

   (b) Déterminer la probabilité qu'aucun consommateur ne soit satisfait du produit A.

2. On interroge une succession de consommateurs du produit A. Le rang du premier consommateur de A satisfait de ce produit définit une variable aléatoire Y.

   (a) Pour tout entier naturel k non nul, déterminer la probabilité de l'événement $[Y = k]$.

   (b) Donner sous la forme d'une fraction irréductible les probabilités suivantes :

      i. $P[Y < 3]$.

      ii. $P[Y < 4 / Y > 2]$.

   (c) Déterminer le nombre entier minimum k_0 tel que la probabilité de l'événement $[Y > k_0]$ soit strictement inférieure à $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$.

3. Le temps, exprimé en minutes, consacré à interroger chaque consommateur est représenté par la variable aléatoire T dont une densité de probabilité f est donnée par :

$$\begin{cases} f(t) = te^{-t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ f(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

   (a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour $x \geqslant 0$, l'intégrale,

$$\int_0^x te^{-t}\, dt,$$

   (b) En déduire que f est bien une densité de probabilité.

   (c) Déterminer la fonction de répartition F_T de T.

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction H_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) = 1 - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

   est la primitive, qui s'annule en 0, de la fonction h_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

   (e) En choisissant des valeurs convenables pour n dans la question qui précède, montrer que les espérances $E(T)$ et $E(T^2)$ existent et les calculer. En déduire la variance de T.