ECRI COME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option technologique

MATHÉMATIQUES

Année 2006

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE 1

On se propose de déterminer par deux méthodes,les suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations de récurrence:

Pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$ avec $u_0 = 1$et $v_0 = 1$

1. Montrer par récurrence que ,pour tout entier naturel n : $u_n + v_n = 2$
2. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = v_n - \frac{4}{5}$$
   (a) Utiliser la question qui précède pour montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déterminer la raison.
   (b) Exprimer $x_n$en fonction de n. En déduire v_n puis $u_n$en fonction de n.
   (c) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers des réels respectifs l_1 et l_2à préciser.
3. On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par :
$$B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$
   (a) Les matrices B et C sont elles inversibles ?
   (b) Montrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre 2,à coefficients réels,notée A telle que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
   (c) Vérifier que l'on a :
$$\begin{cases} B + C = I \\ B + \dfrac{1}{6}C = A \end{cases}$$
   où I désigne la matrice unité d'ordre 2.
   (d) Calculer les produits matriciels B^2,C^2,BC,CB.
   (e) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \left(B + \left(\frac{1}{6}\right)^n C\right)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
   (f) Retrouver ainsi l'expression de u_n et de v_n en fonction de n .
   Vérifier que l'on a:
$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par :
$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes pour $f(x)$ et e^{-x} :

x	-1	$-0,5$	$0,5$	1	$1,5$	2	3	4	5
$f(x)$	0	$0,41$	$1,36$	$1,47$	$1,39$	$1,21$	$0,80$	$0,45$	$0,24$
e^{-x}	$2,71$	$1,65$	$0,61$	$0,37$	$0,22$	$0,14$	$0,05$	$0,02$	$0,01$

1. Etude des variations de f

1. Déterminer la fonction dérivée f'de f.
2. Dresser le tableau de variation de f sur$[-1,+\infty[$.
3. Donner la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Prouver,par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}$$

2. Démontrer que,pour tout réel x appartenant à [1,],

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

3. On note $g$la fonction définie sur $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ par $g(x) = f(x) - x$

   (a) Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et montrer ainsi que g est décroissante sur $\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

   (b) Prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à $\left[1,\frac{3}{2}\right]$. tel que $g(\alpha) = 0$. Exprimer$f(\alpha)$ en fonction de α.

   (c) Montrer que si $\alpha \leqslant u_n$,alors $u_{n+1} \leqslant \alpha$. Montrer que si $u_n \leqslant \alpha$ alors $\alpha \leqslant u_{n+1}$.

4. Rappeler l'énoncé du théorème de l'inégalité des accroissements finis et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$

   Puis que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand tend n vers l'infini.

EXERCICE 3

On dispose d'une urne qui contient des boules numérotées de 1 à N ,N étant un entier naturel non nul.
On y effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée avant de procéder au tirage suivant. On désigne par X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages nécessaires pour voir pour la première fois toutes les boules de l'urne.

1. Calcul de la somme d'une série

On considère un entier $n \geqslant 1$et la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par :

$$\forall x \in [0,1[, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Donner l'expression de $S_n(x)$ et en déduire la valeur de la somme :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

On rappelle que:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2. On suppose que l'urne contient 2 boules (N=2)

1. Montrer que la probabilité d'avoir effectué n tirages pour voir pour la première fois les deux boules de l'urne,est donnée par : pour $n \geqslant 2 \quad p\left[X = n\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
2. Vérifier que la variable aléatoire $Y = X - 1$ suit une loi géométrique. Quel en est son paramètre ? Donner la valeur de l'espérance et de la variance deY. En déduire l'espérance et la variance de X.

3. On suppose que l'urne contient 3 boules (N=3).

On note A_n (respectivement B_n ,C_n) l'événement:"la boule A (respectivement la boule B,la boule C)n'a pas été obtenue au cours des n tirages, $n \in \mathbb{N}^{\times}$

1. Déterminer les probabilités suivantes :

$$p\left[A_n\right], \quad p\left[A_n \cap B_n\right], \quad p\left[A_n \cap B_n \cap C_n\right]$$

2. Exprimer l'événement $[X > n]$ en fonction des événements A_n,B_n,C_n.
3. En utilisant la formule ci-dessous :

$$p\left[A_n \cup B_n \cup C_n\right] = p\left[A_n\right] + p\left[B_n\right] + p\left[C_n\right] - p\left[A_n \cap B_n\right] - p\left[B_n \cap C_n\right] - p\left[A_n \cap C_n\right] + p\left[A_n \cap B_n \cap C_n\right]$$

   Prouver que pour tout $n \geqslant 2$:

$$p\left[X > n\right] = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

4. En déduire que la loi de X est donnée par : pour tout $n \geqslant 3 \quad p\left[X = n\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
5. Vérifier que :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} p\left[X = n\right] = 1$$

6. Montrer que X admet une espérance et déterminer cette espérance.