EDHEC
School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option générale

Année 1979

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

PROBLEME I

Trois enfants A, B et C jouent avec une balle.
Lorsque A a la balle, la probabilité pour qu'il l'envoie à B est 0,75 et la probabilité pour qu'il l'envoie à C est 0,25.
Lorsque B a la balle, il l'envoie respectivement à A et à C avec les probabilités 0,75 et 0,25
C envoie toujours la balle à B.
On désigne respectivement par A_n, B_n, C_n les probabilités pour qu'à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer ce soit A, B ou C qui ait la balle.

1. Montrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre 3 que l'on notera M, telle que
$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}$$
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice M ainsi que les vecteurs propres associées.
3. En déduire que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale et P une matrice que l'on déterminera.
4. En déduire la matrice M^n.
5. Calculer les limites lorsque n tend vers l'infini des probabilités A_n, B_n, C_n. On vérifiera que ces limites sont indépendantes de l'enfant qui avait la balle au début du jeu.

PROBLEME II

Soit F l'ensemble des fonctions numériques à valeurs réelles, définies et continues sur l'intervalle $[-1,+1]$, et f et g deux éléments de F.
Soit M la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel k, associe le maximum des valeurs prises par la fonction $f+kg$ sur l'intervalle $[-1,+1]$.
On désignera par $E(k)$ l'ensemble des x de l'intervalle $[-1,+1]$ pour lesquels la fonction $f+kg$ atteint son maximum.

1. Déterminer explicitement les fonctions M_1 et M_2 associées respectivement aux fonctions f_1 et g_1 d'une part, et aux fonctions f_2 et g_2 d'autre part avec

$$\begin{array}{lll} f_1(x)=(1-x^2)^{3/2} & \text{et} & g_1(x)=x \\ f_2(x)=x^4-2x^2 & \text{et} & g_2(x)=4x^2 \end{array}$$

2. Montrer que la fonction M_2 définie ci-dessus n'est pas dérivable pour une valeur de x_0 que l'on déterminera.

3. Déterminer les ensembles $E_1(k)$ et $E_2(k)$ associés respectivement aux fonctions f_1+kg_1 et f_2+kg_2.
(Pour $E_2(k)$ on distinguera 3 cas selon les valeurs de k.)

4. On suppose dans cette question que $g(x)=x$.
Montrer qu'il existe une fonction f unique de F vérifiant les trois conditions suivantes :

   (1) f est dérivable en tout point de $]-1,+1[$.

   (2) $f(0)=0$

   (3) $\forall u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad E(u)=\sin u$

5. Soient deux réels u et v, deux fonctions f et g quelconques de F.
Soient d'autre part x un élément de $E(u)$ et y un élément de $E(v)$.
Montrer que $(v-u).g(x) \leqslant M(v)-M(u) \leqslant (v-u).g(y)$.
En déduire que la fonction M est une fonction continue.
Note : si $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ alors $f'(x)=\arcsin x$.

PROBLEME III

Soit f_n la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x)=e^{-1/x}x^{-n} \text{ si } x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

où n désigne un entier naturel.

1. Montrer que cette fonction est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$ quel que soit n.

2. Etudier les variations de f_n et construire sa représentation graphique.

3. Montrer que l'intégrale $I_n=\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ a un sens pour tout $n \geqslant 1$.

   (On pourra étudier séparément $\int_0^1 f_n(x)dx$ et $\int_1^{+\infty} f_n(x)dx$).

4. Calculer I_n en fonction de n.

PROBLEME IV

1. Soit Z le complexe $\dfrac{-1+i}{4}$.

   (a) Ecrire Z sous forme trigonométrique.

   (b) Calculer les racines cubiques de Z que l'on écrira sous forme trigonométrique.

   (c) Montrer qu'une seule de ces racines a une puissance quatrième réelle.

2. Déterminer les réels a et b et les complexes λ et μ pour que l'on ait, quel que soit le nombre complexe z

$$z^4 + \lambda z^3 + \mu z^2 - (1-i)z - \frac{1}{4} = (z + a + ib)^4$$

- FIN -