EDHEC
School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option générale

Année 1980

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

PROBLEME I

Note : on pourra permuter les symboles $\int$ et $\sum$ sans démonstration

A. (1) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$0 < \frac{t}{e^t - 1} \leqslant 1$$

(on posera $\dfrac{t}{e^t-1} = 1$ pour $t = 0$)

(2) Montrer que

$$\forall t \geqslant 0, \quad \frac{te^{-nt}}{e^t - 1} = \frac{t}{e^t - 1} - \sum_{k=1}^{n} t.e^{-kt}$$

(3) Calculer $\int\limits_0^x t.e^{-kt}dt$ et en déduire la valeur de I_k

$$I_k = \int_0^{+\infty} t.e^{-kt}dt$$

(4) Déduire des résultats suivants la valeur de

$$L = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t.e^{-nt}}{e^t - 1}dt$$

puis démontrer l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

B. (1) Montrer que la fonction φ définie sur $[0, \pi]$ par

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 2a \\ \varphi(t) &= \frac{at + bt^2}{\sin(\frac{t}{2})} \quad \text{pour } t \in]0, \pi] \end{aligned}$$

où a et b sont deux réels non nuls, est continue sur $[0, \pi]$

(2) Calculer

$$L' = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t). \sin\left(\frac{2n+1}{2}\right) t.dt$$

(3) Déterminer les réels a et b tels que

$$\forall k \geqslant 1, \quad \int_0^{\pi} (at + bt^2) \cos(kt) = \frac{1}{k^2}$$

(4) Sachant que

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$

C. On suppose que la durée d'acheminement du courrier exprimée en jours est un aléa numérique T dont la densité de probabilité est la fonction f telle que

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{pour tout } t < 0 \\ f(t) &= A.t.e^{-kt} && \text{pour } t \geqslant 0 \end{aligned}$$

(1) Déterminer la valeur de A.

(2) i. A a désormais dans toute la suite du problème la valeur trouvée ci-dessus.
On suppose que $k = 2$.
Représenter graphiquement la fonction f ainsi que la fonction de répartition F de T. (unité de longueur : 5 cm).
On précisera les coordonnées des maximums et des points d'inflexion éventuels, ainsi que l'équation des tangentes aux points d'abscisse $t = 0$ de ces deux courbes.

ii. Quelle est la probabilité pour que le courrier soit acheminé en moins de 3 jours ? (Donner cette valeur à 10^{-3} près).

iii. Quelle est la probabilité pour que le courrier soit acheminé en plus de 2 jours sachant qu'il l'est en moins de 5 jours ? (Donner cette valeur à 10^{-3} près)

(3) Dans cette question, k est quelconque.
Calculer la dérivée de $g(t) = (at + b).e^{-kt}$, puis déterminer les réels a et b pour que g soit une primitive de f.
En déduire l'espérance mathématique $E(T)$ de T.
Par un raisonnement analogue, calculer $E(T^2)$ puis la variance de T.

PROBLEME II

Soit E_k l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à k, de la variable réelle x.
Deux fonctions f et g de E_k sont dites orthogonales sur $[-1,+1]$ si et seulement si

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{+1} f(x).g(x)dx = 0$$

a. On suppose qu'il existe une base $B_3 = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ de E_3 de polynômes de degrés respectifs 0, 1, 2, et 3, deux à deux orthogonaux.
En posant

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \quad \forall x \in [-1,+1] \\ P_1(1) &= P_2(1) = P_3(1) = 1 \end{aligned}$$

déterminer les polynômes P_1, P_2 et P_3.

b. On suppose qu'il existe de même une base $B_k = (P_0, P_1, P_2, ..., P_k)$ de E_k, de polynômes de degrés respectifs $0, 1, 2, ..., k$, deux à deux orthogonaux et vérifiant

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \quad \forall x \in [-1,+1] \\ P_1(1) &= P_2(1) = P_3(1) = \cdots = 1 \end{aligned}$$

Montrer que tout polynôme P_n de B_k est orthogonal à tout polynôme de E_k de degré inférieur à n.

c. On se propose de trouver l'expression de $P_n(x)$ pour $0 \leqslant n \leqslant k$.
Soit A une fonction polynôme dont la dérivée d'ordre n est telle que :

$$A^{(n)}(x) = P_n(x) \qquad \forall x \in [-1,+1]$$

et vérifiant

$$A(-1) = A^{(1)}(-1) = A^{(2)}(-1) = \cdots = A^{(n-1)}(-1) = 0$$

Soit Q un polynôme quelconque de E_k de degré $(n-1)$.
Par intégration par parties successives, calculer

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x).Q(x)dx$$

En déduire la valeur de $A(1)$, $A^{(1)}(1)$, $A^{(2)}(1), ..., A^{(n-1)}(1)$ puis la forme générale de $A(x)$.
En appliquant la formule de Leibniz à

$$(x^2-1)^n = (x+1)^n(x-1)^n$$

pour $x = 1$, montrer que $P_n(x)$ s'écrit sous la forme de la dérivée d'ordre n d'une fonction polynôme que l'on précisera.
Retrouver alors les expressions de P_1, P_2 et P_3.