EDHEC
School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option générale

Année 1981

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

PROBLEME I

On considère l'application f définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C}\backslash\{1\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & f(z) = \dfrac{z^2 - 5z + 7}{z - 1} \end{array}$$

Montrer que $f(z)$ peut s'écrire sous la forme $\alpha z + \beta + \dfrac{\gamma}{z-1}$

I. On rappelle que $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. On suppose que $z \in \mathbb{Q}\backslash\{1\}$.

(1) Montrer que $f(z) \in \mathbb{Z}$ implique $z \in \mathbb{Z}$.

(2) En déduire tous les rationnels z tels que $f(z) \in \mathbb{Z}$.

II. On suppose maintenant que $z \in \mathbb{Z}\backslash\{1\}$.

(1) Etudier les variations de f et en donner la représentation graphique C dans un repère orthonormé. (On précisera les asymptotes et la position de la courbe C par rapport à l'asymptote oblique; on placera également les points trouvées en I.2)

(2) Calculer $f(1+z) + f(1-z)$
En déduire que la courbe C admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

(3) Calculer l'aire arithmétique A du domaine compris entre la droite d'équation $z = 0$, la courbe C, l'asymptote oblique et la droite d'équation $z = a$, a étant un réel strictement négatif.
Comment choisir a pour que $A = 1$.

III. On suppose enfin que $z \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$.

(1) On pose $z = x + iy$ et $f(z) = X + iY$.
Déterminer X et Y en fonction de x et y.

(2) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
Donner suivant les cas trouvés, l'expression de $f(z)$ en fonction de x.

PROBLEME II

I. Un tireur tire une série de 6 balles. Pour chaque balle, la probabilité de toucher une cible est de 0,4.
Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où la cible a été touchée au cours de la série.

(1) Donner la loi de probabilité de X.

(2) Quelle est la probabilité d'avoir touché 5 fois exactement la cible sachant qu'il l'a touchée au moins deux fois ?

(3) Quel est le nombre minimum k de séries de 6 balles, qu'il doit effectuer pour que la probabilité d'avoir touché au moins une fois la cible (au cours des $6k$ lancers) soit supérieure à 0,9999.

II. Un autre tireur tire une série de n balles.
Soit Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de fois où il atteint la cible au cours des n tirs.
On suppose que la loi de Y peut être assimilée à une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.
On sait d'autre part, que

$$\begin{aligned} P(Y &< 13) = 0,002 \\ P(Y &> 30) = 0,003 \end{aligned}$$

Déterminer alors la moyenne et l'écart-type de Y.
Quelle est pour ce tireur, la probabilité qu'il touche la cible à chaque tir d'une balle ?
Donner une estimation de n (à une unité près)

PROBLEME III

Le tableau suivant donne, pour les années 1973 à 1980, les taux d'accroissements y, du produit intérieur brut français, et x de la consommation des ménages en France.
Ces taux sont exprimés en %

Année	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
x	5,5	2,1	2,9	4,9	2,5	3	3,5	2,3
y	5,3	2,9	0,4	4,7	3	3,3	3,8	2,2

1. Calculer la covariance σ_{xy}, des caractères x et y.

2. Donner les équations des droites de régression de y en x, et de x en y.

3. Quel est le coefficient de corrélation de x et y ?
N.B. : On fera apparaître clairement les formules développées, utilisées ainsi que les calculs intermédiaires. On ne tiendra pas compte des résultats non expliqués.

PROBLEME IV

I. Soit f_n la fonction définie sur $[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{\ln n} & \text{si } x \in [0, \dfrac{1}{n}[\\ f_n(x) = \dfrac{1}{x \ln n} & \text{si } x \in [\dfrac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

(1) Montrer que f_n est continue sur $[0,1]$.

(2) Calculer $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

(3) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ existe. Donner sa valeur.

(4) Comparer $\int_0^1 (\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x))dx$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

II. Pour $y \in \mathbb{R}$, $y \geqslant 1$, on définit la fonction f_y sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} f_y(x) = \dfrac{y^2 x}{\ln y} & \text{si } x \in [0, \dfrac{1}{y}[\\ f_n(x) = \dfrac{1}{x \ln y} & \text{si } x \in [\dfrac{1}{y}, 1] \end{cases}$$

(1) Soit $y = y_0 \geqslant 2$.
Représenter graphiquement la fonction f_{y_0}.
On précisera pour quelle valeur, que l'on notera x_0, la fonction f_{y_0} est maximum.
A quel intervalle appartient nécessairement x_0 ?

(2) a. Montrer que $\forall y \geqslant 2, \quad y \neq y_0, \quad f_y(x_0) < f_{y_0}(x_0)$.
Pour cela, on étudiera les 2 cas : $2 \leqslant y \leqslant y_0$ et $y > y_0$.
En déduire la valeur de $g(x) = \sup\limits_{y \geqslant 2}[f_y(x)]$ pour $x \in]0, \dfrac{1}{2}[$

b. Pour $x \in [\dfrac{1}{2}, 1]$, montrer que $f_y(x) \leqslant f_2(x)$
En déduire la valeur de $g(x) = \sup\limits_{y \geqslant 2}[f_y(x)]$ pour $x \in [\dfrac{1}{2}, 1]$.

c. Calculer $g(0)$ et représenter graphiquement la fonction $g(x)$ pour $x \in [0,1]$.