EDHEC

School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Année 1983

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

PROBLEME I

PARTIE A

Soient E l'ensemble des fonctions continuement dérivables, et nulles en dehors d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ (avec $a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$ $a < b$) et g une fonction continue croissante.
On définit la fonction h suivante :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & h(f) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -f'(x)g(x)\,dx \end{array}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Montrer que h est définie sur E.

3. Montrer que h est une forme linéaire sur E
   (i.e. : h aplication linéaire de $E \to \mathbb{R}$)

4. On se propose de montrer que si f est positive alors $h(f) \geqslant 0$

   (a) Résoudre dans le cas où g est continuement dérivable.

   (b) En précisant pourquoi on peut le faire, restreindre le domaine d'intégration à un intervalle : $[a, b]$ tel que $f(a) = f(b) = 0$.
   On définit la suite de fonctions g_n telle que :
   $g_n(x) = g\left(a + p\dfrac{(b-a)}{n}\right)$ si

$a+p\frac{(b-a)}{n} \leqslant x < a+(p+1)\frac{(b-a)}{n}$ avec $p \in \{0,1,\ldots,n-1\}$
et $g_n(b) = g(b)$

- Montrer que g_n converge uniformément vers g
  (i.e. : il existe une suite u_n convergent vers 0 tel que $\forall x \in [a,b] \quad |g_n(x) - g(x)| \leqslant u_n$)
- Déduire le résultat voulu en se servant de la suite g_n.

5. Montrer que si f_n est une suite de fonction de E convergent en décroissant vers 0
   (i.e.: $\forall n, \quad \forall x, \quad 0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$)
   alors la suite $h(f_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
   (on suppose dans cette question g continuement dérivable)

PARTIE B

On considère les termes suivants :

$$I_n = \int_0^1 (Lgx)^n dx$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, I_n est une intégrale impropre convergente.
2. Trouver une relation de récurrence
3. Calculer pour toute valeur de n , I_n.

Les exercices A et B sont indépendants

PROBLEME II

Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ deux m-uplet de nombres réels tels que $i \neq j, \quad \alpha_i \neq \alpha_j$
On considère l'ensemble $\mathcal{P}(\alpha,\beta)$ l'ensemble des polynômes tel que

$$\mathcal{P}(\alpha,\beta) = [P \in \mathbb{R}(X) \quad / \quad P(\alpha_i) = \beta_i \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}]$$

On se propose de trouver la forme générale d'un élément de $\mathcal{P}(\alpha,\beta)$

1. Trouver la forme générale dans le cas $m = 1$.
2. Soient P_1 un polynôme tel que $P_1(\alpha_1) = \beta_1$
   P_2 un polynôme tel que $P_2(\alpha_2) = \beta_2$
   ...
   P_m un polynôme tel que $P_m(\alpha_m) = \beta_m$
   Trouver en fonction de $P_1, \ldots, P_m$ un polynôme de l'ensemble $\mathcal{P}(\alpha,\beta)$
   En déduire la forme générale des éléments de $\mathcal{P}(\alpha,\beta)$
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{P}(\alpha,\beta)$ soit un espace vectoriel.
   On supposera maintenant que cette condition est vérifiée.
4. On note $\mathcal{P}_n(\alpha,\beta) = \{P \in \mathcal{P}(\alpha,\beta) / \quad d^\circ P \leqslant n\}$
   (a) Montrer que si $m > n$ alors $\mathcal{P}_n(\alpha,\beta)$ est réduit au polynôme nul.
   (b) dans $n \geqslant m$ trouver la dimension et une base de l'espace $\mathcal{P}_n(\alpha,\beta)$.
5. Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes de $d^\circ P \leqslant n$ et α un nombre donné
   On considére l'application h de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}_n$

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{P}_n & \xrightarrow{h} & \mathcal{P}_n \\ P & \mapsto & h(P) = Q \text{ tel que } Q(X) = (X-\alpha)P'(X) \end{array}$$

(a) Montrer que h est une application linéaire.

(b) Déterminer la matrice de h en munissant $\mathcal{P}_n$ de la base canonique $(1, X, , \dots, X^n)$.

(c) Chercher le noyau de h.

(d) Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de h.

(e) la matrice est-elle diagonalisable. Pourquoi ?

(f) Calculer h^k $(h^k = \underbrace{h \circ h \circ \cdots \circ h}_{k \text{ fois}})$

6. On considère l'application g de de $\mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_n$

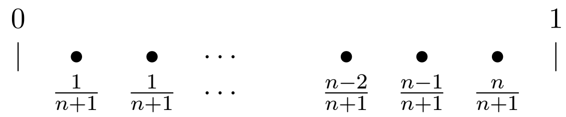
$$\begin{array}{ccl} \mathcal{P}_n & \xrightarrow{g} & \mathcal{P}_n \\ P & \mapsto & g(P) = R \text{ tel que } R' = h(P') \text{ et } R(\alpha) = 0 \end{array}$$

(a) Montrer que g est une application linéaire.

(b) Déterminer la matrice de g en munissant $\mathcal{P}_n$ de la base canonique $(1, X, , \dots, X^n)$ et chercher les valeurs propres et vecteurs propres.

PROBLEME III

On considère un bâton de longueur 1 et on repère sur ce bâton n points de la façon suivante :



On tire de façon équiprobable, l'une des valeurs $\dfrac{i}{n+1}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$, et on note X le résultat.

Puis parmi celles non tirées, on tire, de façon équiprobable une valeur que l'on note Y.

PARTIE A

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).

2. On définit les trois variables suivantes :

$$A = \min(X, Y) \qquad B = 1 - \max(X, Y) \qquad C = 1 - A - B$$

Donner les fonctions de répartition de A, B, C.

3. Calculer la probabilité pour que A, B, C soient les trois longeurs des côtés d'un triangle de périmètre 1.

4. (a) Calculer $E(A)$, $E(B)$, $E(C)$.

(b) On note $\mathcal{A}$ l'événement " on peut former un triangle avec les trois longueurs A, B, C "
Calculer la fonction de répartition de la variable A conditionnée par l'événement $\mathcal{A}$, et l'espérance de cette variable conditionnée.

(c) Calculer la covariance du couple (X, Y) et chercher la limite quand n tend vers $+\infty$.

PARTIE B

1. On coupe maintenant le bâton en deux endroits différents, au hasard et de façon indépendante (i.e. : X et Y sont deux variables uniformes , continues sur $[0, 1]$ et indépendantes)
Refaire les question précédentes, en utilisant les résultats précédents (il faut justifier pourquoi vous pouvez utiliser les résultats précédents)
(pour le 1). , on calculera $P(X \leqslant x \ , \ Y \leqslant y)$)

FIN