EDHEC
School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option générale et technologique

Année 1984

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

I) Test sanguin

On estime à 20 % le nombre de personnes atteintes d'une maladie A.
Pour diagnostiquer cette maladie, on prélève sur les individus du sang. On fait ensuite une analyse de ce sang pour dépister la maladie.
Cette analyse coûte très cher, c'est pourquoi on propose d'opérer de la façon suivante :
On forme des groupes de x personnes et on prélève une partie du sang de chacun des personnes que l'on met dans une même éprouvette et on fait l'analyse. Deux cas peuvent se produire :

a) L'analyse ne révèle pas de germe de la maladie et donc tous les membres du groupe sont en bonne santé.

b) L'analyse révèle une présence de germes et dans ce cas, on refait une analyse pour chacune des personnes du groupe.

Le but du problème est de déterminer la taille x^0 du groupe qui permet en moyenne (espérance) d'aboutir au nombre minimum d'analyses.

1. Pour chaque valeur de x, déterminer le nombre moyen (espérance) d'analyses par personne. On notera $f(x)$ ce nombre.

2. Etudier pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 2, la fonction f. En particulier, on étudiera le signe de la dérivée seconde.

3. En ne perdant pas de vue que la valeur x^0 est un nombre entier, trouver cette valeur en vous servant de la question précédente. On justifiera la réponse.

4. Un hôpital décide d'effectuer par jour l'analyse sur n groupes de x^0 individus. On note X le nombre d'analyses réalisés par l'hôpital pendant une journée.
   Montrer qu'il existe deux nombres a et b tels que la loi de la variable $Y = aX + b$ peut-être approximée par une loi binômiale dont on précisera les paramètres.

5. Déterminer la probabilité pour que la variable X soit supérieure au nombre d'analyses que l'on ferait si on opérait de façon classique (une analyse par individu).
   On calculera cette probabilité pour $n = 4$ et pour $n = 50$.
   On voudrais généraliser cette méthode à n'importe quel type de maladie pour laquelle on connait la proportion de personnes atteintes.
   On ne suppose donc plus que cette proportion égale à 20 % mais à un certain nombre p compris entre 0 et 1.

6. Déterminer la plus petite valeur $\widetilde{p}$ telle que pour toute valeur p supérieure à $\widetilde{p}$, le nombre optimal $x^0(p)$ associé à p soit 1 (c'est-à-dire une analyse par individu).

7. On définit la fonction g suivante :
   $$g : \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{N} \\ p & \mapsto & x^0(p) \end{array}$$
   - Montrer que g est une fonction en escalier décroissante.
   - Montrer que $\lim\limits_{p \to 0} g(p) = +\infty$
   - Montrer que $\lim\limits_{p \to 1} g(p) = 1$

II) Longueur d'une piste

On vous demande de concevoir une piste de ski. On vous impose au départ une forme approximative pour qu'elle comporte un certain nombre de difficultés. Enfin, on vous précise quelle longueur doit faire la piste.
Vous avez donc à résoudre le problème suivant :
On vous donne une fonction f définie sur $[a, b]$ et on désire calculer la longueur de l'arc de la courbe formé par le graphe de cette fonction entre les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
On suppose f continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ et f' continue sur $[a, b]$.

1. Soit $(a_0, a_1, ..., a_n)$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ (c'est-à-dire $a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$) en n parties égales..
   On considère les points M_i ($i \in \{0, 1, ..., n\}$) de coordonnées $x = a_i$, $y = f(a_i)$.
   On définit $d_n = \sum\limits_{i=1}^{n} d(M_i, M_{i-1})$ (d est la distance euclidienne, c'est-à-dire : $M(x, y)$, $M'(x', y')$)
   $$d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2})$$
   Montrez qu'il existe n points $t_1, .., t_n$ tels que $a_{i-1} < t_i < a_i$ $i \in \{1, .., n\}$ avec
   $$d_n = \frac{b - a}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}.$$

2. Montrer que la fonction $g = \sqrt{1 + (f')^2}$ est continue et intégrable sur $[a, b]$.

3. Montrer que $d = \lim\limits_{n \to +\infty} d_n = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
   d est donc la longueur de l'arc de courbe formé par le graphe de la fonction f entre les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

   Applications

4. Vérifier dans le cas où f est une fonction affine (c'est-à-dire $x \mapsto cx + d$) que le nombre défini ci-dessus est égal à la longueur du segment de droite délimité par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, calculée par le théorème de Pythagore.

5. Retrouver, en choisissant convenablement la fonction f et les deux nombres réels a et b, le périmètre d'un cercle en vous servant de la formule établie au 3).

6. Calculer le nombre d en prenant la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $x \mapsto f(x) = \sqrt{x^3}$.
   Vous pourriez maintenant à l'aide de la formule établie au 3) construire votre piste de ski en associant à chaque portion de votre piste, une fonction dont le graphe reproduirait la forme de cette portion.

III) Equivalence de normes

Le but de ce problème est de montrer que dans l'espace $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes (c'est-à-dire : si $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont deux normes alors il existe deux nombres réels strictement positifs a et b tels que

$$\forall V \in \mathbb{R}^n, \qquad a\,\|V\|_1 \leqslant \|V\|_2 \leqslant b\,\|V\|_1$$

Bien que cette propriété soit générale, nous allons nous restreindre au cas où les deux normes sont définies par un produit scalaire.
On note $(.,.)_1$ et $(.,.)_2$ les deux produits scalaires et $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ les normes associées (c'est-à-dire

$$V \in \mathbb{R}^n, \qquad \|V\|_1 = \sqrt{(V,V)_1}, \qquad \|V\|_2 = \sqrt{(V,V)_2}$$

1. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

   (*) Il existe un nombre réel b strictement positif tel que pour tout élément V de $\mathbb{R}^n$ on a $\|V\|_2 \leqslant b\,\|V\|_2$

   (**) Soit $\mathcal{U}_1 = \{V \in \mathbb{R}^n \quad / \quad \|V\|_1 = 1\}$ alors il existe un nombre réel b strictement positif tel que pour tout élément V de $\mathcal{U}_1$ on a $\|V\|_2 \leqslant b$.

   Nous allons montrer la propriété (**)

2. Soit $(V_1, V_2, ..., V_n)$ une base orthonormée pour le produit scalaire $(.,.)_1$.
   Montrer que si V est un vecteur de $\mathcal{U}_1$ alors ses coordonnées dans la base $(V_1, V_2, ..., V_n)$ sont en valeur absolue inférieures ou égales à 1.

3. Montrer la propriété (**).

4. En déduire que les deux normes sont équivalentes.
   Nous allons maintenant calculer dans un cas particulier les deux nombres a et b.

5. On suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni de la base canonique.

   - Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout élément V de $\mathbb{R}^n$ associe la somme des valeurs absolues de ses coordonnées dans la base canonique est une norme.
   - On prendre pour $\|.\|_2$ la norme euclidienne classique (c'est-à-dire : à tout élément V de $\mathbb{R}^n$, on associe la racine carrée de la somme des carrées de ses coordonnées).
     trouver deux nombres réels a et b strictement positifs qui satisfont à la double inégalité

     $$a\,\|V\|_1 \leqslant \|V\|_2 \leqslant b\,\|V\|_1$$

     pour tout élément V de $\mathbb{R}^n$.

Insérer une table de loi normale