EDHEC
School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Année 1993

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soit la fonction f de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre deux en zéro de f
2. En déduire que f est dérivable en zéro; donner l'équation de la tangente au point d'abcisse zéro à la courbe de f et préciser la position, au voisinage de zéro, de la courbe de f par rapport à cette tangente.
3. Etudier les variations de f sur $]-1;+\infty[$ et donner le signe de $f(x)$ pour tout réel $x > -1$

Exercice 2 :

Pour tout entier n, on pose : $I_n = \int\limits_0^1 x^n \sin \pi x \; dx$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n-2} et I_n pour tout entier $n \geqslant 2$.

4. Démontrer par récurrence que l'on a pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$I_{2p} = (-1)^p \frac{2(2p)!}{\pi^{2p+1}} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(2p)!}{\pi^{2k+1}(2p-2k)!}$$

Exercice 3 :

On effectue des lancers successifs au hasard d'un dé cubique non truqué jusqu'à ce que certains événements soient réalisés.

1. On suppose que l'on dispose d'une fonction PASCAL, notée die[1] sans paramètre, qui fournit à chaque appel , un entier pris au hasard entre 1 et 6 et on considère le programme PASCAL suivant qui simule l'espérience décrite ci-dessus.

```
program X;
var c,k:  integer;
begin
c :=1; k :=0;
while c<>6 do
            begin
                k:=k+1; c := die;
            end;
writeln (k)
end.
```

   (a) Quel est l'événement qui doit être réalisé pour que l'on arrête les lancers de dé ? Que représente l'entier k ?

   (b) Exprimer en fonction de la valeur de k qui est affichée à la fin le nombre $a(k)$ d'affectations et le nombre $c(k)$ de comparaisons effectuées lors de l'exécution du programme.

2. Pour tout entier i compris au sens large entre 1 et 6, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le chiffre i pour la première fois.
Montrer que X_i suit une loi usuelle et donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_i.

3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le chiffre 1 et le chiffre 2.

   (a) Quel est l'ensemble E des valeurs prises par Y ?

   (b) Montrer que, pour tout entier k de E :

$$P(Y = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 < k)) + P((X_1 < k) \cap (X_2 = k))$$

   et

$$P(X_1 = k) = P((X_1 = k) \cap (X_2 < k)) + P((X_1 = k)) \cap (X_2) \geqslant k))$$

   (c) En déduire que, pour tout entier k de E :

$$P(Y = k) = 2[P(X_1 = k) - P((X_1 = k) \cap (X_2 \geqslant k))].$$

   (d) Utiliser l'égalité précédente pour calculer $\mathrm{P}(Y = k)$ pour tout entier k de E.

   (e) Ecrire un programne PASCAL qui simule les lancers successifs du dé et qui compte le nombre de tirages nécessaires pour obtenir le chiffre 1 et le chiffre 2. (On pourra utiliser la fonction die ainsi que deus variables booléennes).

[1] die(pl. dice) signifie dé en anglais

Problème

Partie A - Résolution dans l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre deux de l'équation :

$$Z^2 = A \qquad (1)$$

où A est une matrice donnée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \qquad \texttt{avec} \qquad 0 < a < 1.$$

1. Dans cette question, on suppose que $a = \frac{5}{8}$ c'est à dire que $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$.

   (a) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A et en déduire que cette matrice est diagonalisable.

   (b) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

   (c) Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale et donner sa valeur.

2. On se place désormais dans le cas générale c'est-à-dire lorsque $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque vérifiant $0 < a < 1$.

   (a) Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et en déduire que A admet deux valeurs propres distinctes.

   (b) Monter que la matrice A est diagonalisbale et que la matrice $D = P^{-1}AP$ (où P est la matrice définie dans la question 1b est diagonale ; exprimer D en fonction de a.

3. (a) Montrer que l'équation 1 est équivalent au système :

   $$\begin{cases} Z & = & PYP^{-1} & (2) \\ Y^2 & = & D & (3) \end{cases}$$

   où P et D sont les matrices de la question 2b telles que $D = P^{-1}AP$.

   (b) On cherche à résoudre l'équation (3) en prenant Y sous la forme générale :

   $$Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

   i. Ecrire le système de quatre équations à quatre inconnues x, y, z, t qui est équivalent à l'équation (3).

   ii. Montrer qu'aucune solution (x, y, z, t) du système ne vérifie $x + t = 0$.

   iii. Résoudre ce système et donner toutes les solutions de l'équation (3) (on discutera suivant les valeurs de a)

   (c) En déduire que l'équation (1) admet respectivement zéro, deux ou quatre solutions suivant que $a < \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$ ou $a > \frac{1}{2}$.

   (d) Donner les quatres solutions de l'équation (1) dans le cas où $a = \frac{5}{8}$.

Partie B - Application à un problème de probabilités

1. Dans une fête foraine, un stand de loterie propose aux joueurs de tenter leur chance de la manière suivante : On dispose de trois sacs S, T et U. Le sac S contient cinq jetons : deux rouges, deux verts et un jaune, le sac T contient huit jetons : cinq marqués 1 et trois marqués O et le sac U contient huit jetons : trois marqués 1 et cinq marqués O.
   La personne qui veut tenter sa chance commence par tirer au hasard et simultanément trois jetons du sac S. Si le tirage est tricolore, elle tire au hasard un jeton du sac T et sinon, elle tire au hasard un jeton du sac U . Elle gagne si le dernier jeton tiré est marqué 1.

   (a) Soit E l'événement : " Les jetons tirés du sac S sont de trois couleurs différentes ".
   Calculer la probabilité $P(E)$ de E ainsi que celle $P(\overline{E})$ de l'événement $\overline{E}$ contraire de E.

   (b) Soit G_1 l'événement : "La personne gagne ".
   Exprimer la probabilité $P(G_1)$ de G_1 à l'aide de $P(E)$ et de $P(\overline{E})$ et en déduire $P(G_1)$

   (c) Montrer que $\begin{pmatrix} P(G_1) \\ P(\overline{G_1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(E) \\ P(\overline{E}) \end{pmatrix}$.

2. Le propriétaire du stand modifie les règles du jeu de la manière suivante :
   La personne qui veut tenter sa chance commence encore par tirer au hasard et simultanément trois jetons du sac S. Si le tirage est tricolore, elle tire au hasard un jeton du sac T et sinon, elle tire au hasard un jeton du sac U.
   Puis

   - si le jeton tiré est marqué 1 (on note F cet événement), elle remet ce jeton dans le sac d'où elle vient de le tirer et elle tire au hasard un jeton du sac T
   - si le jeton tiré est marqué 0 (c'est donc l'événement $\overline{F}$), elle remet ce jeton dans le sac d'où elle vient de le tirer et elle tire au hasard un jeton du sac U.

   Elle gagne si le dernier jeton tiré est marqué 1.
   De plus, la composition du sac S est inchangée mais le sac T contient n jetons marqués 1 et $8 - n$ marqués 0 et le sac U contient $8 - n$ jetons marqués 1 et n jetons marqués 0, n étant un entier naturel vérifiant $1 \leqslant n \leqslant 7$.
   On pose $p = \frac{n}{8}$ et $q = 1 - p$.
   On note encore E l'événement : " Les jetons tirés du sac S sont de trois couleurs différentes " et on note cette fois-ci G_2 l'événement : "La personne gagne".

   (a) Démontrer que : $\begin{pmatrix} P(G_1) \\ P(\overline{G_1}) \end{pmatrix} = B^2 \begin{pmatrix} P(E) \\ P(\overline{E}) \end{pmatrix}$ `avec` $B = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

   (b) Utiliserla question 3d de la partie **A** pour trouver deux valeurs de n pour lesquelles la probabilité $P(G_2)$ est égal à la probabilité $P(G_1)$ calculée dans la question 1b