EDHEC
School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Année 1993

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On rappelle que, pour tout nombre réel x :

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3 x$$

1. On note ϕ l'application de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [-1;1] \quad \phi(t) = 3t - 4t$$

   (a) Démontrer que : $\forall t \in [-1;1] \quad \phi(t) \in [-1;1]$

   (b) Etablir que, pour tout couple (t, t') d'éléments de $[-1;1]$:

$$\left|\phi(t) - \phi(t')\right| \leqslant 9\left|t - t'\right|$$

2. On définit une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions numériques par : $f_1(x) = x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2, \quad f_{n+1}(x) = 3f_n(\frac{x}{3}) - 4(f_n(\frac{x}{3}))^3$$

   Ecrire une fonction PASCAL, dont l'entête est :
   function f(n:integer;x:real):real; et qui fournit la valeur de $f_n(x)$.

3. Prouver que :

$$\forall x \in [-1;1],\ \forall n \in \mathbb{N}^\times \quad |f_n(x) - \sin x| \leqslant \frac{|x|^3}{263^n}$$

   Que peut-on en conclure ?

Exercice 2

On considère la matrice carrée A d'ordre n à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdots & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{n!} & \cdots & \frac{1}{(2n-3)!} & \frac{1}{(2n-2)!} \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-1)!} \end{pmatrix}$$

La ligne d'indice i de cette matrice est donc : $\begin{pmatrix} \frac{1}{i!} & \frac{1}{(i+1)!} & \cdots & \frac{1}{(i+n-2)!} & \frac{1}{(i+n-1)!} \end{pmatrix}$

1. On considère un vecteur colonne X : $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$.

   On lui associe la fonction polynôme P, définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$P(t) = \frac{x_1}{n!} + \frac{x_2}{(n+1)!}t + \frac{x_3}{(n+2)!}t^2 + ... + \frac{x_n}{(2n-1)!}t^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(n+k-1)!}t^{k-1}$$

   (a) On pose$f(t) = tP(t)$. Calculer $f(1), f'(1), ..., f^{(n-1)}(1)$

   (b) En déduire les dérivées successives de P au point 1.

2. Montrer que P est nul et en déduire que A est inversible.

Problème

Notations : Pour tout entier naturel non nul n, on note :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

f_n et g_n sont des fonction numériques définies sur $\mathbb{R}$ par les relation :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{x}{k}) \quad g_n(x) = \frac{n!}{(x+1)..(x+n)}$$

I_n, V_n et U_n les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)dx \quad U_n = \int_0^{1/\sqrt{H_n}} g_n(x)dx \quad V_n = \int_{1/\sqrt{H_n}}^1 g_n(x)dx$$

E_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à $n-1$.

Partie I

1. (a) La suite de terme général H_n est-elle convergente ? La suite de terme général S_n est-elle convergente ?
   (b) Pour tout nombre réel positif ou nul x, prouver les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \tag{1}$$

   (c) En appliquant la double inégalité (1) à $x = \frac{1}{k}$ pour $k = 1, 2, ..., n$ montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$

2. (a) Exprimer $g_n(x)$ à l'aide de $f_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire, à l'aide de la double inégalité (1), les inégalités :

$$\int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx \leqslant U_n \leqslant e^{\frac{S_n}{2H_n}} \int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-xH_n} dx$$

   (c) En conclure que $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{H_n}$.
   (d) Montrer de façon analogue les inégalités : $\quad 0 \leqslant V_n \leqslant e^{-\sqrt{H_n}} \frac{e^{\frac{S_n}{2}}}{H_n}$
   (e) Démontrer que $V_n = o(\frac{1}{H_n})$ quand n tend vers l'infini.

3. À l'aide des questions précédentes, établir que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$

Partie II

1. On considère la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ d'éléments de E définie par :

$$\text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n, \quad e_k(x) = (x+1)(x+2)..(x+k-1)(x+k)..(x+n) = \prod_{i\neq k,\ 1\leqslant i\leqslant n} (x+i)$$

   (a) Montrer que cette famille est libre. En déduire que c'est une base de E_n.
   (b) En déduire l'existence de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad n! = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)$$

   (c) Calculer λ_k en fonction de n et du coefficient binomial C_{n-1}^{k-1}.

2. Déduire de la question 1 de la **partie II** la formule :

$$I_n = n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_{n-1}^{k-1} (\ln(k+1) - \ln k)$$

3. Utiliser cette égalité et l'équivalent de I_n obtenu dans la **partie I** pour justifier l'équivalent :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k (\ln(k+1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln n}$$