EDHEC

School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Année 1994

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Dans cet exercice, une suite réelle peut être désignée indifféremment par l'une ou l'autre des notations u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On étudie un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles à indices dans $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{E} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n$$

1. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est de dimension 3. (On pourra éventuellement considérer l'application linéaire φ de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1, u_2)$.)

2. Montrer que si l'on pose : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \dfrac{1}{2^n}, \quad b_n = \dfrac{n}{2^n}, \quad c_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ les trois suites a, b, c forment une base de $\mathcal{E}$.

3. Montrer que si u appartient à $\mathcal{E}$, la série de terme général u_n est convergente. On notera $s(u) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

4. Calculer $s(a)$, $s(b)$ et $s(c)$.

5. Montrer que $\quad s : u \longmapsto s(u) \quad$ est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathbb{R}$; quelle est la dimension de $\ker s$?

6. Déterminer $\ker s$.

Exercice 2

α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t} t \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^n t$$

1. Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.

2. (a) Calculer I_0.

   (b) Pour $n \geqslant 1$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.

   (c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.

3. (a) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur l'intervalle $[0, x]$, montrer que :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$

   (b) En déduire que : $\left|I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant K I_{2n+1}$
   K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.

   (c) En déduire : $I = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right).$

4. On pose, pour tout réel x : $\arctan(x) = \int\limits_0^x \frac{t}{1+t^2}.$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad \left|\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$

   (c) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction arctan.

Exercice 3

La notation $\min(a, b)$ désigne le plus petit des deux nombres réels a et b.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les fonctions φ_n et F_n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en posant:

$$\varphi_n(x) = x + 2x^2 + \cdots + nx^n \text{ et } F_n(x) = \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \min(\varphi_n(x), 1) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{array}$$

1. On suppose la constante `n` déjà déclarée. Recopier, en la complétant, la déclaration de la fonction PASCAL `F` pour qu'elle renvoie la valeur $F_n(x)$. On calculera $y = x + 2x^2 + \cdots + nx^n$ par l'algorithme de Hörner.

```
function F(x:real):real;
var y:real; k:integer;
begin
if x<0 then ......  else ......  begin
        y:=0; for ......  do ......;
        if y<=1 then ......  else ...... end;
end;
```

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^{\times}$. Montrer l'existence d'un nombre réel positif x_n unique tel que $\varphi_n(x_n) = 1$.

(b) Exprimer $F_n(x)$ sans utiliser le symbole min selon que $x \in [0, x_n]$ ou $x \in [x_n, +\infty[$.

(c) Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité, X_n.

(d) Que vaut $P(X_n \leqslant 0)$? Que vaut $P(X_n \geqslant 1)$?

3. (a) Montrer, pour n dans $\mathbb{N}^{\times}$, l'existence d'un unique réel μ_n tel que $F_n(\mu_n) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) μ_n est une grandeur caractéristique de la variable aléatoire X_n. Quel est son nom?

4. Comparer $F_{n+1}(\mu_n)$ à $F_{n+1}(\mu_{n+1})$, et en déduire le sens de variation, puis la convergence de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$.

5. (a) Calculer $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$ pour $x \in [0, 1[$, et calculer le nombre $L \in [0, 1[$ tel que $\varphi(L) = 1$.

   (b) En déduire, selon que $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant L$, ou $x > L$ la valeur de $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$, et déterminer le seul nombre réel ℓ tel que $F(\ell) = \dfrac{1}{2}$.

   (c) Montrer sans calcul que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times} \quad F_n(\ell) < \dfrac{1}{2}$

   (d) Montrer aussi que , si $\varepsilon > 0$, on a pour n suffisamment grand : $F_n(\ell + \varepsilon) > \dfrac{1}{2}$.

   (e) Déduire de ce qui précède la limite de la suite (μ_n).

Problème

Données et objectifs du problème.
p désigne un nombre réel fixé tel que $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.
On étudie le mouvement dans le plan d'un mobile M partant de l'origine et se déplaçant indéfiniment d'un point à l'autre de l'ensemble des points du plan à coordonnées (x, y) entières telles que $y \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant 2$. On appellera "chemin" l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) sont des entiers et vérifient : $x \in \{0, 1\}$ et $y \geqslant 0$
Le mouvement est une succession de "pas". Si le mobile se trouve à un instant donné au point de coordonnées (x, y), le pas suivant le mènera au point (x', y') selon par la règle suivante :

- Si $x = 0$, alors
  - Avec la probabilité p : $x' = 0$ et $y' = y + 1$
  - Avec la probabilité q : $x' = 1$ et $y' = y$
- Si $x = 1$, alors
  - Avec la probabilité p : $x' = 1$ et $y' = y + 1$
  - Avec la probabilité $\dfrac{q}{2}$: $x' = 0$ et $y' = y$
  - Avec la probabilité $\dfrac{q}{2}$: $x' = 2$ et $y' = y$
- Si $x = 2$ (c'est-à-dire si le mobile est hors du chemin), alors $x' = 2$ et $y' = y + 1$

On note respectivement X_n et Y_n l'abscisse et l'ordonnée du mobile à l'issue du n-ième pas. A titre d'exemple, les événements $(X_0 = 0)$ et $(Y_0 = 0)$ sont certains.

Partie 1 Simulation sur ordinateur de cette expérience aléatoire.

On admet que l'on dispose d'une fonction `hasard`, sans paramètre, à valeurs entières, qui retourne aléatoirement les valeurs -1 0 et 1, respectivement avec les probabilités $\dfrac{q}{2}$, p, et $\dfrac{q}{2}$.
Rédiger les lignes manquantes du programme PASCAL suivant pour que celui-ci simule le cheminement du mobile M en affichant à l'écran les coordonnées (x, y) des positions successives de M jusqu'à ce que son abscisse prenne pour la première fois la valeur 2 (c'est-à dire jusqu'à la sortie du chemin).

```
program simulation;
 var x,y,h:integer;
 begin
 x:=0; y:=0;
 while x<2 do begin
 h:=hasard;
 ..................
 end;
 end.
```

Partie 2 Loi de probabilité de la variable aléatoire X_n et de la durée du trajet sur le chemin.

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} & 0 \\ q & p & 0 \\ 0 & \frac{q}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée?

   (b) Montrer que $p + \frac{q}{\sqrt{2}}$ est valeur propre de A. Déterminer un vecteur propre v relatif à cette valeur propre, et dont la première composante est 1.

   (c) Montrer que $p - \frac{q}{\sqrt{2}}$ est valeur propre de A. Déterminer un vecteur propre w relatif à cette valeur propre, et dont la première composante est 1.

   (d) En déduire une matrice inversible Π telle que la matrice $A' = \Pi^{-1} A \Pi$ soit diagonale. Expliciter A'.

   (e) Résoudre le système $\Pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire le produit $\Pi^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (f) Calculer explicitement la première colonne de la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Justifier de façon précise :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times \qquad \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(X_{n-1} = 0) \\ P(X_{n-1} = 1) \\ P(X_{n-1} = 2) \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

3. (a) Calculer $\ell = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 2)$. Avez vous une justification intuitive du résultat ?

   (b) Donner un équivalent de la forme ab^n de $\ell - P(X_n = 2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On note T la durée du trajet sur le chemin, c'est-à-dire la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel que tel que $X_n = 2$.

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, exprimer l'événement $(T = n)$ en fonction des événements $(X_{n-1} = 1)$ et $(X_n = 2)$.

   (b) Déterminer la loi de probabilité de T.

   (c) Calculer l'espérance mathématique de T.

Loi de probabilité du vecteur aléatoire (X_n, Y_n) et de la distance parcourue sur le chemin.

Dans cette partie, $[a]$ désigne la partie entière d'un réel a.

1. (a) On pose $y = n - 2k$. Déterminer, en fonction de l'entier k compris entre 0 et $[\frac{n}{2}]$, la probabilité que M parvienne en $(0, n-2k)$ en effectuant n "pas"le long d'un itinéraire donné, itinéraire constitué d'une succession de $n - 2k$ pas vers le haut et d'un nombre égal de pas vers la droite et de pas vers la gauche, dans un ordre déterminé.

   (b) y désignant maintenant un entier naturel quelconque, déterminer le nombre d'itinéraires possibles menant de O à $(0, y)$ en n pas. On aura soin de distinguer deux cas :
   - $n - y$ impair ou strictement négatif.
   - $n - y$ pair et positif.

   (c) En déduire, en distinguant toujours ces deux cas, la valeur de : $P((X_n = 0) \cap (Y_n = y))$.

2. Déterminer de même la valeur de : $P((X_n = 1) \cap (Y_n = y))$.

3. Dans cette question on cherche à retrouver la loi de probabilité (marginale) de X_n à partir de la loi conjointe du couple (X_n, Y_n).

   (a) Justifier très précisément l'égalité : $P(X_n = 0) = \sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} P((X_n = 0) \cap (Y_n = n - 2k))$.

   (b) Retrouver ainsi la valeur de $P(X_n = 0)$.

   (c) Retrouver de la même façon la valeur de $P(X_n = 1)$.

4. On note D la variable aléatoire égale à la "distance parcourue sur le chemin", c'est-à-dire la valeur prise par la variable aléatoire Y_t où t désigne le plus petit des entiers n tels que $X_n = 2$.

   (a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire D?

   (b) Montrer que : $(D = m) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} [(X_{k+1} = 2) \cap (X_k = 1) \cap (Y_k = m)]$

   (c) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N} \qquad P(D = m) = \dfrac{p^m}{m!} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(m+1+2k)!}{(1+2k)!} \left(\dfrac{q^2}{2}\right)^{1+k}$.

   (d) Calculer cette probabilité pour $m = 0$, $m = 1$, et $m = 2$.