EDHEC

School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Année 1995

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Préliminaire:
On rappelle que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0: $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$.
En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergent de limite a strictement positive, alors il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0: $u_n \geqslant \dfrac{a}{2}$.

Ce résultat peut être admis dans la suite de l'exercice.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x(1-x)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 élément de $]0,1[$ et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Etudier les variations de f.

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = nu_n$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0,1]$.

   (c) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$.
   Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite vaut $L(1-L)$.

3. On suppose que $L \neq 1$.
   Montrer en utilisant le préliminaire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{L(1-L)}{2n}$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

4. Montrer à l'aide de la question 2b que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 2

1. E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, $(n \geqslant 2)$.
   On note i l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.
   Soit s un endomorphisme involutif de E, c'est-à-dire $s \circ s = i$.

   (a) Justifier que s est bijectif et définir s^{-1}.

   (b) Déterminer les seules valeurs propres possibles de s.
   On suppose dans la suite de cette partie que $s \neq i$ et $s \neq -i$.

   (c) i. Montrer que $(s - i) \circ (s + i) = \theta$.
   ii. En déduire que -1 et 1 sont les valeurs propres de s.

   (d) Montrer que $E = \ker(s - i) \oplus \ker(s + i)$.
   (On montrera dans un premier temps que si pour tout x de E on a $x = u+v$ avec u élément de $\ker(s-i)$ et v élément de $\ker(s + i)$ alors nécessairement $s(x) = u - v$.)
   s est appelée la symétrie par rapport à $\ker(s - i)$ parallèlement à $\ker(s + i)$.

2. Etude d'un exemple.
   $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désignant l'espace vectoriel des matrices carées réelles d'ordre n, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Si M est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont $m_{i,j}$ est l'élément de $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne, avec i et j éléments de $[\![1, n]\!]$, on rappelle que:
   M est symétrique si et seulement si pour tout (i, j), $m_{i,j} = m_{j,i}$.
   M est antisymétrique si et seulement si pour tout (i, j), $m_{i,j} = -m_{j,i}$.
   Dans la suite, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M.

   (a) Vérifier que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

   (c) On note T l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à chaque matrice associe sa transposée, montrer que T est une symétrie par rapport à $\mathcal{S}$ parallèlement à $\mathcal{A}$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et λ un réel strictement positif.

1. (a) j et k désignant des entiers naturels, $a_{k,j}$ des réels tels que pour tout j la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$ soit convergente, montrer que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{n} a_{k,j} = \sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$.

   (b) Soient X une variable aléatoire prenant des valeurs dans $\mathbb{N}$ et S une variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
   Pour tout $k$élément de $\mathbb{N}$, on définit l' espérance conditionnelle de Ssachant $X = k$par:

$$E(S/X = k) = \sum_{j=0}^{n} jP(S = j/X = k)$$

   Montrer, en utilisant la première question que $E(S) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} E(S/X = k)P(X = k)$.

2. Un ascenseur désert n étages d'un immeuble. A chaque voyage le nombre de personnes qui montent dans cet ascenseur au rez de chaussée est un variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
On émet les hypothèses suivantes:

- Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez de chaussée.
- Chaque personne choisit son étage d'arrivée au hasard et indépendamment des autres passagers. (Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur).

Enfin, pour tout entier naturel k, on appelle S_k la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur lorsque celui-ci contient k passagers au départ.

(a) Montrer que pour tout j appartenant à $[\![1, n]\!]$ et pour tout entier naturel k:

$$P(S_{k+1} = j) = \frac{j}{n} P(S_k = j) + \frac{n-j+1}{n} P(S_k = j-1)$$

(b) En déduire que $E(S_{k+1}) = 1 + (1 - \frac{1}{n})E(S_k)$.

(c) Après avoir justifié que $E(S_0) = 0$, déterminer $E(S_k)$ pour tout entier naturel k.

(d) Montrer que si S désigne une variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur à un voyage donné alors:

$$E(S) = n(1 - e^{\frac{-\lambda}{n}})$$

Problème

p et n désignent deux entiers naturels non nuls.

1. On pose $u_p = \frac{1}{p} - \int\limits_{p}^{p+1} \frac{dt}{t}$, $v_n = \sum\limits_{p=1}^{n} u_p$.

(a) i. Prouver que pour tout p supérieur ou égal à 1: $0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

ii. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante puis prouver qu'elle converge et que sa limite γ est élément de $[0, 1]$. On note maintenant $r_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.

(b) i. Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 1: $u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{x}{p+x}dx$.

ii. En déduire que pour tout entier p supérieur ou égal à 2: $\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p})$.

iii. A l'aide de cette dernière question, établir que $\frac{1}{2(n+1)} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{2n}$.

(c) Déterminer un entier n tel que v_n soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près.

2. Dans cette partie, k désigne un entier supérieur ou égal à 1.
On pose, pour tout réel t strictement positif: $f_0(t) = \frac{1}{t}$ et $f_k(t) = \frac{1}{t(t+1)..(t+k)}$.

(a) Montrer que $f_{k-1}(t) - f_{k-1}(t+1) = kf_k(t)$.

(b) En déduire que $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{n!}{k(n+k)!}$.

3. On note P_k le polynôme défini par: $P_1(t) = t$ et pour tout k supérieur ou égal à 2,

$$P_k(t) = t(1-t)(2-t)\cdots(k-1-t)$$

On pose d'autre part $a_k = \int_0^1 P_k(t)dt$.

(a) i. Vérifier que pour tout x positif: $\dfrac{1}{p+x} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p+1} \times \dfrac{1-x}{p+x}$.

ii. En déduire que $u_p = \dfrac{1}{2p(p+1)} + \dfrac{1}{p(p+1)} \int_0^1 \dfrac{P_2(x)}{p+x}dx$.

(b) i. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 1, et pour tout réel x positif:

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{P_k(x)}{p+k} + \frac{P_{k+1}(x)}{(p+x)(p+k)}$$

ii. En déduire par récurrence sur k que

$$u_p = \frac{a_1}{p(p+1)} + \frac{a_2}{p(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{a_k}{p(p+1)\cdots(p+k)} + \frac{1}{p(p+1)..(p+k)} \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}dx$$

iii. Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 2: $0 \leqslant \int_0^1 \dfrac{P_{k+1}(x)}{p+x}dx \leqslant \dfrac{a_{k+1}}{p-1}$.

iv. En déduire en utilisant la partie 2, que pour tout entier k supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 1:

$$r_n = \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{2(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{a_k}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} + r_{n,k}$$

avec $0 \leqslant r_{n,k} \leqslant \dfrac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$.

v. Construire une suite $(v_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ de limite γ telle que $0 \leqslant \gamma - v_{n,k} \leqslant \dfrac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$.

(c) i. Calculer a_1, a_2, a_3, a_4.

ii. Déterminer un entier n_0 tel que $v_{n_0,3}$ soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près.

iii. Ecrire en Turbo-Pascal, un algorithme permattant le calcul de v_{n_0}, puis de $v_{n_0,3}$.

iv. Donner une valeur de γ à 10^{-5} près.