EDHEC
School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Année 1998

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

EXERCICE 1

Question préliminaire :

La suite (x_n) est une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi (on montrera qu'il existe un entier naturel N tel que : si $n \geqslant N$, alors $x_n^2 \leqslant x_n$).

On considère, d'une part, la fonction numérique, notée ch, définie par $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et d'autre part la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\text{ch}(u_n)} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Etudier la fonction ch et dresser son tableau de variations.

2. Donner le développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0.

3. (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

4. On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $\quad v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.
   (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.

(c) Pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k)$. En déduire que la série de terme général v_n est divergente.

5. (a) Montrer que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$.
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente.
   (c) En utilisant le préliminaire, conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

EXERCICE 2

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc "Pile" ou "Face" avec la probabilité 1/2.
On note P_k (resp. F_k) l'événement : "on obtient Pile (resp. Face) au k-ième lancer". Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, "Pile" puis "Face" dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession.
On note Y la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient, pour la première fois, "Pile" suivi de "Pile" aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), Y prenant la valeur 0 si l'on n'obtient jamais une telle succession. L'objet de l'exercice est de calculer les espérances de X et Y et de vérifier que, "contre toute attente", $E(Y) > E(X)$.

1. Calculer $P(X = 2)$.

2. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que si le premier lancer est un "Pile", alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.
   (b) En déduire que :
$$\forall k \geqslant 3 \quad P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}$$
   (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$.
   Déterminer u_k, puis donner la loi de X.

3. Montrer que X a une espérance, notée $E(X)$, et la calculer.

4. (a) Montrer que (F_1, P_1P_2, P_1F_2) est un système complet d'événements.
   (b) En déduire que, pour pour tout entier k supérieur ou égal à 4 :
$$P(Y = k) = \frac{1}{2}P(Y = k-1) + \frac{1}{4}P(Y = k-2) \qquad ((*))$$
   (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $v_k = P(Y = k)$.
   Déterminer v_2 et v_3 puis montrer qu'en posant $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$, on a, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 : $v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \frac{1}{4}v_{k-2}$.
   (d) En déduire la suite $(v_k)_{k\geqslant 0}$, puis donner la loi de Y.
   (e) Montrer que Y a une espérance, notée $E(Y)$, et la calculer.

EXERCICE

1. On dit que Z suit une loi exponentielle bilatérale si une densité de Z est f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

   (a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de Z.

(c) Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle bilatérale, déterminer une densité de $V = Z_1 + Z_2$.

2. Dans cette question, X et Y sont deux variables indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1 et on pose $Z = X - Y$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de $-Y$.

   (b) Déterminer une densité de Z et vérifier que Z suit la loi exponentielle bilatérale.

   (c) Déterminer l'espérance de Z.

   (d) On pose $T = |Z|$. Déterminer la fonction de répartition de T et vérifier que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

PROBLEME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n ; on rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Un polynôme est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré est égal à 1. On note φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $\varphi(P) = Q$ défini par : $Q = (X-1)P' - XP''$.

Partie 1 : étude de φ.

1. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Pour tout j élément de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(X^j)$.

   (c) Écrire la matrice M de φ dans $\mathcal{B}$.

   (d) En déduire que φ est diagonalisable.

2. Pour tout k élément de $[\![0, n]\!]$, on désigne par L_k l'unique polynôme unitaire vérifiant $\varphi(L_k) = kL_k$ et on écrit $L_k = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i X^i$, avec $a_p = 1$.

   (a) Montrer que $p = k$, c'est-à-dire que L_k est de degré k.

   (b) Déterminer L_0.

   (c) Écrire, lorsque k est supérieur ou égal à 1, le système d'équations dont $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ sont solutions.

   (d) En déduire que : $\forall i \in [\![0, k]\!] \quad a_i = (-1)^{k-i}(k-i)!(C_k^i)^2$.

3. On note f_k la fonction réelle définie par $f_k(x) = x^k e^{-x}$.

   Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad L_k(x) = (-1)^k e^x f_k^{(k)}(x)$.

Partie 2 : étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. P et Q étant des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\Psi(P, Q) = (P \mid Q) = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(X) dx$$

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k , l'intégrale $I_k = \int\limits_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.

   (b) Vérifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.

   (c) Montrer que Ψ est un produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit k un entier naturel non nul. Les fonctions f et g étant de classe C^k sur l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, montrer la formule d'intégration par parties d'ordre k :

$$\int_a^b f(t)g^{(k)}(t)dt = \left[\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j f^{(j)}(t)g^{(k-j-1)}(t)\right]_a^b + (-1)^k \int_a^b f^{(k)}(t)g(t)dt$$

3. Montrer que : $\forall i \in [\![0, k-1]\!], \quad f_k^{(i)}(0) = 0$. ($f_k$ étant la fonction définie à la question I.3.)

4. Soient i et k deux entiers naturels.

   (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x L_i(t)f_k^{(k)}(t)dt = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j L_i^{(j)}(x)f_k^{(k-j-1)}(x) + (-1)^k \int_0^x L_i^{(k)}(t)f_k(t)dt$$

   (b) En déduire que $\int_0^{+\infty} L_i(t)L_k(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} L_i^{(k)}(t)f_k(t)dt$.

   (c) Montrer que, pour le produit scalaire Ψ, la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (d) Montrer que $I_{k+1} = (k+1)I_k$, puis donner la valeur de I_k.

En déduire la norme de L_k, notée $\|L_k\|$, puis donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie 3 : étude des racines de L_n.

On rappelle que n est un entier supérieur ou égal à 1.
On pose $R(x) = \prod_{j=1}^{p}(x - x_j)$, où $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les racines positives, distinctes, d'ordre impair de L_n. On convient que $R(x) = 1$ si L_n n'a pas de racine d'ordre impair dans $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que RL_n est positif sur $\mathbb{R}_+$.

2. On suppose dans cette question que $p < n$.

   (a) En remarquant que R est élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que $(R \mid L)_n = 0$.

   (b) En déduire que RL_n est le polynôme nul.

3. (a) En notant la contradiction obtenue en 2b), conclure que $p = n$.

   (b) En déduire que L_n a n racines réelles distinctes et toutes positives.