# EDHEC
**School of management**

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

## MATHEMATIQUES

Option scientifique

**Année 2000**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**

## Exercice 1

1. La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire $X$ de densité $f$ continue, strictement positive sur $\mathbb{R}^{\times}$ et nulle sur $\mathbb{R}_{-}$. On note $F$ la fonction de répartition de $X$.

   (a) On désigne par $t$ et $h$ deux réels strictement positifs. Exprimer, à l'aide de la fonction $F$, la probabilité $p(t,h)$ que le composant tombe en panne avant l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant $t$.

   (b) Établir que, lorsque $h$ est au voisinage de $0^+$, $p(t,h) \sim \dfrac{f(t)}{1-F(t)}h$.

   On pose désormais, pour tout réel positif $t$: $\lambda_X(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)}$. On a bien sûr $\lambda_X(t) \geqslant 0$.

   La fonction positive $\lambda_X$ est appelée taux de panne du composant ou taux de panne de $X$.

2. Soit $X$ une variable aléatoire qui possède une densité continue, strictement positive sur $\mathbb{R}^{\times}$, nulle sur $\mathbb{R}_{-}$ et de taux de panne $\lambda_X$.

   (a) Pour tout réel strictement positif $t$, calculer $\int\limits_0^t \lambda_X(u)u$ puis montrer que la seule connaissance de la fonction "taux de panne" $\lambda_X$ permet de déterminer la fonction de répartition $F$ de $X$.

   (b) Déduire de la question précédente que les variables suivant des lois exponentielles possèdent un taux de panne constant et qu'elles sont les seules dans ce cas.

3. La durée de vie (en années) d'un appareil est une variable aléatoire $X$ dont le "taux de panne" est la fonction $\lambda_X$ définie par $\lambda_X(t) = t^3$.

(a) Quelle est la probabilité que cet appareil survive plus d'un an ?

(b) Quelle est la probabilité que cet appareil, âgé de 1 an, survive plus de 2 ans ?

## Exercice 2

Dans cet exercice, $x$ désigne un réel élément de $[0,1[$ et $n$ un entier supérieur ou égal à 1.

1. (a) Montrer que: $\forall p \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \dfrac{1}{p+1} \leqslant \int\limits_{p}^{p+1} \dfrac{t}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}$.

   (b) En déduire que: $\forall k \in \mathbb{N}^{\times}, \quad 0 \leqslant \sum\limits_{p=1}^{k} \dfrac{1}{p} - \ln(k) \leqslant 1$.

2. (a) Montrer que: $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int\limits_{0}^{x} \dfrac{t^n}{1-t} dt$.

   (b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ converge et exprimer sa somme en fonction de $x$.

3. (a) Pour tout $x$ de $]0,1[$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n^2 \ln(n) x^n)$.

   (b) En déduire que, pour tout $x$ de $[0,1[$, la série de terme général $\ln(n)x^n$ est convergente.
   On pose maintenant $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)x^k$ et $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln(k)x^k$.

4. Le but de cette question est de trouver un équivalent simple de $S(x)$ lorsque $x$ est au voisinage de $1^-$.

   (a) Montrer, en utilisant la première question, que:

   $$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{x^k}{p} - S_n(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x^k$$

   (b) En déduire que: $\quad 0 \leqslant \dfrac{1}{1-x} \left( \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{x^p}{p} - x^{n+1} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p} \right) - S_n(x) \leqslant \dfrac{x}{1-x}$.

   (c) Justifier que: $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p} = 0$.

   (d) En déduire que: $\quad S(x) \underset{1^-}{\sim} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

## Exercice 3

Un sondage consiste à proposer l'affirmation $\mathcal{A}$ à certaines personnes d'une population donnée. Le sujet abordé étant délicat, le stratagème suivant est mis en place afin de mettre en confiance les personnes sondées pour qu'elles ne mentent pas ...
L'enquêteur dispose d'un paquet de 20 cartes, numérotées de 1 à 20, qu'il remet à la personne sondée. Celle-ci tire une carte au hasard et ne la montre pas à l'enquêteur. La règle est alors la suivante:

- si la carte porte le numéro 1, la personne sondée répond "vrai" si elle est d'accord avec l'affirmation $\mathcal{A}$ et 'faux" sinon.

- si la carte porte un autre numéro, la personne sondée répond "vrai" si elle n'est pas d'accord avec l'affirmation $\mathcal{A}$ et 'faux" sinon.

Le but de l'enquête est d'évaluer la proportion $p$ de gens de cette population qui sont réellement d'accord avec l'affirmation $\mathcal{A}$.

1. On interroge une personne selon ce procédé et on considère l'événement suivant, noté $V$: la personne répond "vrai" On note $\theta = P(V)$.
   En utilisant la formule des probabilités totales, exprimer $\theta$ en fonction de $p$, puis en déduire $p$ en fonction de $\theta$.

2. Certaines considérations théoriques laissent penser que $p = \dfrac{17}{18}$.

   (a) Vérifier que $\theta = \dfrac{1}{10}$.

   (b) Calculer la probabilité pour qu'une personne ayant répondu "vrai" soit d'accord avec l'affirmation $\mathcal{A}$.

   On revient au cas général où l'on ne connaît ni $p$, ni $\theta$.

3. On considère un échantillon aléatoire, de taille $n$, extrait de la population considérée et on note $S_n$, le nombre de réponses "vrai" obtenues. On suppose $n$ assez grand pour pouvoir considérer que cet échantillonnage est assimilable à un tirage avec remise.

   (a) Donner la loi de $S_n$ ainsi que son espérance et sa variance.

   (b) Montrer que $\dfrac{S_n}{n}$, est un estimateur sans biais et convergent de $\theta$.

4. Dans cette question, on suppose que l'on a réalisé un échantillon de 100 personnes et on constate que 23 personnes ont répondu "vrai".

   (a) Donner une estimation ponctuelle de $\theta$ et de $p$.

   (b) Donner un intervalle de confiance à 95% de $\theta$ puis de $p$.

On rappelle que, si $\Phi$ désigne la fonction de répartition d'une variable $X$ suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\Phi(1,96) = 0,975$.

## Problème

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire noté $(./.)$ défini par:

$$\forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall u' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3, \quad (u \;/\; u') = xx' + yy' + zz'$$

La norme du vecteur $u$ est alors définie par $\|u\| = \sqrt{(u \;/\; u)}$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormée pour le produit scalaire défini ci-dessus.
Le but de ce problème est de montrer que l'on peut trouver une famille de cardinal maximal, $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ formée de $n$ vecteurs unitaires et deux à deux distincts de $\mathbb{R}^3$ ainsi qu'un réel $a$ tels que : pour tout couple d'entiers $(i,j)$ vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on ait: $(u_i \;/\; u_j) = \alpha$.
La partie 1 permet d'obtenir un résultat d'algèbre linéaire utile pour la suite, la partie 2 étudie les propriétés d'une telle famille et la partie 3 propose la construction d'une famille solution du problème pour $n = 4$ (cette valeur est d'ailleurs la valeur maximale possible de $n$ mais ce résultat ne sera pas démontré dans ce problème).

### Partie1

Dans cette partie, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout réel $a$, on note $M_a$, la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1, les autres étant égaux à $a$. On note $I$ la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(R)$ et $J$ la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. (a) $J$ est-elle diagonalisable?

   (b) Calculer $J^2$ et en déduire les 2 valeurs propres de $J$.

2. (a) Utiliser une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(R)$ formée de vecteurs propres de $J$ pour déterminer les deux valeurs propres de $M_a$.
   (b) En déduire que $M_a$, est inversible si et seulement si: $a \neq 1$ et $a \neq -\dfrac{1}{n-1}$

## Partie 2

On suppose que l'on a trouvé une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ formée de $n$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$ unitaires et deux à deux distincts, et un réel $\alpha$ solutions du problème.

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$.

   (a) Montrer que $M_\alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$.

   (b) En déduire la valeur maximale de $n$ lorsque $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -\dfrac{1}{n-1}$.

2. Étude du cas $\alpha = 1$.

   (a) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs $u_i$ et $u_j$ (avec $i \neq j$).
   A quelle condition a-t-on l'égalité?
   (b) En déduire que $n = 1$.

3. Dans cette question, on admet qu'il existe une famille $(u_1, u_2, u_3, u_4)$, formée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ unitaires et deux à deux distincts, solution du problème.

   (a) Donner la valeur de $\alpha$.
   (b) Montrer que $(u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Calculer les coordonnées de $u_4$ dans cette base.

## Partie 3

1. Donner une famille solution du problème posé, pour $n = 3$ et $\alpha = 0$.

2. On pose $v_1 = e_1,\ v_2 = -\dfrac{1}{2}e_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $v_3 = -\dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}e_2$

   (a) Montrer que $(v_1, v_2, v_3)$ est solution du problème posé avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.
   (b) Trouver deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que la famille $(e_3, \lambda v_1 + \mu e_3, \lambda v_3 + \mu e_3)$ soit solution du problème pour $n = 4$.