

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

---

**MATHEMATIQUES**

Option scientifique

**Année 2004**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**

## **EXERCICE 1**

Dans tout l'exercice,  $X$  est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

1. Une première inégalité.

(a) Montrer que  $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$ .

(b) En déduire l'inégalité

$$(*) : P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

2. Première amélioration de l'inégalité (\*).

(a) Soit  $Y$  une variable aléatoire discrète, à valeurs positives et ayant une espérance.

On note  $Y(\Omega) = y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$

Montrer, en minorant  $E(Y)$ , que :

$$\forall a > 0, \quad P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}.$$

(b) On considère une variable aléatoire discrète  $Z$ , d'espérance nulle et de variance  $\sigma^2$ .

Montrer que, pour tout couple  $(a, x)$  de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}_+$  :

$$P(Z \geq a) \leq P((Z + x)^2 \geq (a + x)^2)$$

(c) En appliquant l'inégalité obtenue en **2.a** à la variable aléatoire  $(Z + x)^2$ , montrer que :

$$\forall a > 0, \quad \forall x \geq 0, \quad P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}$$

(d) En déduire que :

$$\forall a > 0, \quad P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

(on pourra étudier la fonction  $f$  qui, à tout  $x$  de  $\mathbb{R}_+$ , associe  $\frac{\sigma^2 + x^2}{(a + x)^2}$ ).

(e) Utiliser cette dernière inégalité pour montrer que :  $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda + 1}$ .

3. Deuxième amélioration de l'inégalité (\*).

Pour tout réel  $t$ , on pose  $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k$ .

(a) Justifier l'existence de  $G_X(t)$  et montrer que :  $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ .

(b) Montrer que :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}$$

(c) Déterminer le minimum sur  $[1, +\infty[$  de la fonction  $g : t \mapsto \frac{e^{t-1}}{t^2}$ .

(d) En déduire que :  $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$ .

4. Montrer que cette dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question **2.e** dès que  $\lambda$  prend des valeurs assez grandes.

## EXERCICE 2

1. On pose, lorsque c'est possible,  $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1 + t + t^{x+1}}$ .

Montrer que le domaine de définition de la fonction  $f$  est  $]0, +\infty[$ .

2. Montrer que  $f$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

3. (a) Justifier l'existence de la quantité  $g(x)$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + t^x)}$ .

(b) Pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  et pour tout  $t$  de  $[1, +\infty[$ , simplifier  $\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1 + t^x}$ , puis établir que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad g(x) = \frac{\ln 2}{x}.$$

(c) En déduire que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln 2}{x},$$

puis déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

4. (a) Montrer que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x + 1}.$$

(b) En déduire la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $0^+$  ainsi qu'un équivalent de  $f(x)$  lorsque  $x$  est au voisinage de  $0^+$ .

5. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

### EXERCICE 3

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , définies toutes les deux sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On pose  $Z = X + Y$ .

- (a) Déterminer une densité de  $Z$ .  
(b) Montrer que, pour tout  $x$  de  $]0, 1[$ , les événements  $(Z > 1)$  et  $(1 - x < Z \leq 1 + x)$  sont indépendants.
- On pose  $T = \max(X, Y)$ . On admet que  $T$  est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .
  - Montrer que  $T$  est une variable à densité puis donner une densité de  $T$ .
  - En déduire que  $T$  possède une espérance  $E(T)$  et la déterminer.
  - On pose  $U = |X - Y|$  et on admet que  $U$  est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Montrer que  $U$  est combinaison linéaire de  $Z$  et  $T$ , puis en déduire l'espérance de  $U$ .

### PROBLEME

Dans tout le problème, la lettre  $n$  désigne un entier naturel.

On note  $E_n$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles de classe  $C^n$  sur  $[0, 1]$ .

En particulier,  $E_0$  est le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles continues sur  $[0, 1]$ .

On note  $N$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $E_2$  vérifiant de plus  $f(0) = f(1) = 0$ .

On considère l'application  $u$  de  $N$  dans  $E_0$  qui, à toute fonction  $f$  de  $N$  associe sa dérivée seconde, notée  $f''$ .

- Montrer que  $N$  est un sous-espace vectoriel de  $E_2$ .
- Montrer que  $u$  est une application linéaire injective.
- Soit  $g$  un élément de  $E_0$ . Pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ , on pose

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x - t| g(t) dt.$$

- Justifier que  $G$  est élément de  $E_1$  et montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G'(x) = \frac{1}{2} \left( \int_0^x g(t) dt - \int_x^1 g(t) dt \right)$$

- En déduire que  $G$  est élément de  $E_2$  et déterminer  $G''$ .
  - Pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ , on pose  $H(x) = G(x) + ax + b$ .  
Déterminer les réels  $a$  et  $b$  (sous forme d'intégrales) pour que  $H$  appartienne à  $N$ .
  - Déterminer  $u(H)$  puis en déduire que  $u$  est surjective.
  - Que peut-on déduire des questions **2** et **3.d** ?
- Vérifier que, pour tout  $x$  élément de  $[0, 1]$ ,

$$(u^{-1})(g)(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x - t| g(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 t g(t) dt - \frac{x}{2} \int_0^1 (1 - 2t) g(t) dt$$

On note  $P_n$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Pour tout entier naturel  $k$  et pour tout réel  $x$ , on pose  $e_k(x) = x^k$ , avec bien sûr  $e_0(x) = 1$ , et on rappelle

que  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $P_n$ .

On note  $N_n$  le sous-espace vectoriel de  $P_n$  constitué des fonctions polynomiales  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$  et telles que  $P(0) = P(1) = 0$ .

Pour tout entier naturel  $k$  et pour tout réel  $x$  on pose  $f_k(x) = x^{k+1}(x-1)$ .

5. Montrer que  $C = (f_0, f_1, \dots, f_n)$  est une base de  $N_{n+2}$ .

On considère l'application linéaire  $v$  de  $N_{n+2}$  dans  $P_n$  qui, à toute fonction  $P$  de  $N_{n+2}$  associe sa dérivée seconde, notée  $P''$ .

6. (a) Pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , déterminer  $v(f_k)$  en fonction de certains des vecteurs de  $\mathcal{B}$ , puis en déduire la matrice  $A$  de  $v$  relativement aux bases  $C$  et  $\mathcal{B}$ .

(b) En déduire que  $v$  est un isomorphisme de  $N_{n+2}$  sur  $P_n$ .

(c) Simplifier, pour tout réel  $x$  et pour tout entier naturel  $k$ , la somme  $\sum_{j=0}^k f_j(x)$ .

(d) Justifier que le résultat de la quatrième question de la partie 1 peut s'appliquer ici, puis déterminer, en utilisant le résultat de la question **2.c**, la matrice  $A^{-1}$ .

(e) Vérifier cette dernière, dans le cas où  $n = 2$  (les calculs devront figurer sur la copie).

7. On considère l'application  $w$  qui à tout élément  $P$  de  $P_n$  associe  $w(P)$ , où  $w(P)$  est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel  $x$  associe  $(x^2 - x)P(x)$ .

(a) Montrer que  $w$  est un endomorphisme de  $P_n$ .

(b) Pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , déterminer  $w(e_k)$ .

(c) En déduire que la matrice de  $w$  dans  $\mathcal{B}$  n'est autre que la matrice  $A$  de la question **2.a**.

(d) L'endomorphisme  $w$  est-il diagonalisable ? Est-ce un automorphisme de  $P_n$  ?

(e) Dans le cas  $n = 2$ , déterminer les sous-espaces propres de  $w$ .