EDHEC

School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Année 2005

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

EXERCICE 1

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.

   (b) En déduire la dimension de $\ker(\mathrm{tr})$.tr

   (c) Etablir que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.

2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f.
   En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.
   On admet que g est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Etablir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.

   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

   (c) g est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x et on rappelle que $[x]$ est le seul entier vérifiant : $[x] \leq x < [x]+1$.
On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P) et qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$). On note F sa fonction de répartition.
On pose $X_1 = [X]$, $X_2 = [10(X - X_1)]$ et l'on admet que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires définies elles aussi sur $((\Omega, A, P)$.

1. (a) Déterminer $X_1(\Omega)$.
   (b) Pour tout k de $X_1(\Omega)$, exprimer $P(X_1 = k)$ à l'aide de F.
   (c) En déduire que $X_1 + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
   (d) Déterminer $E(X_1)$ en fonction de λ.

2. (a) Déterminer $X_2(\Omega)$ et dire ce que représente X_2.
   (b) Justifier que, pour tout k élément de $\{0, 1, \ldots, 9\}$, $P(X_2 = k) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(X_1 = i \cap X_2 = k)$, puis montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ P(X_2 = k) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \left(F\left(i + \dfrac{k+1}{10}\right) - F\left(i + \dfrac{k}{10}\right)\right)$.
   En déduire que : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda k}{10}} \dfrac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}$.

3. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction de n variables réelles, notée f, définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

1. (a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Calculer les dérivées premières et secondes de f.

2. (a) Déterminer le seul point critique $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

3. (a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
   (b) Calculer le produit $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (c) A l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n, puis celles de A_n.

4. (a) Montrer que, pour tout $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ non nul, on a : ${}^tHA_nH > 0$.
   (b) En déduire que f admet un minimum local en $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et vérifier que ce minimum est égal à $-\dfrac{n}{4(n+1)}$.

PROBLEME

On considère deux jetons J_1, et J_2, équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).
Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1.
Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.
Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.
On note E l'événement " le jeton J_1 est choisi pour le jeu " et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement " le k-ième lancer fait apparaître une face numérotée 1 ".

Partie I : Etude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve.

1. (a) Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbb{N}^{\times}$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.

   (b) Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbb{N}^{\times}$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ?
   Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

   Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
   On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.
   On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, A, P).

2. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(X = n)$.

   (b) En déduire que $P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?

   (c) Montrer que X a une espérance puis déterminer $E(X)$.

   (d) Montrer que $X(X-1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(X) = 2$.

3. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(Y = n)$.

   (b) En déduire que $P(Y = 0) = 0$.

   (c) Montrer que Y a une espérance puis déterminer $E(Y)$.

   (d) Montrer que $Y(Y-1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(Y) = \dfrac{5}{4}$.

4. On définit sur (Ω, A, P) la variable aléatoire S par : $\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega))$.

   (a) Déterminer $S(\Omega)$.

   (b) Montrer que $P(S = 1) = P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$.

   (c) Pour tout entier n supérieur ou égal 2, comparer d'une part $(X = n)$ et $(Y < n)$ et d'autre part $(Y = n)$ et $(X < n)$, puis en déduire que : $(S = n) = (X = n \cup Y = n)$.

   (d) Reconnaître alors la loi de S et préciser son espérance et sa variance.

5. On définit sur (Ω, A, P) la variable aléatoire I par : $\forall \omega \in \Omega, \quad I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.

   (a) Montrer que I est une variable de Bernoulli.

   (b) Déterminer $P(I = 0)$ puis donner la loi de I, ainsi que son espérance et sa variance.

Partie II : simulation des variables X et Y.

On rappelle que `random(2)` renvoie au hasard un entier de $\{0,1\}$.

1. On considère le programme suivant :

```
Program edhec2005 ;
Var jeton, lancer, X : integer ;
Begin
Randomize ;
X : = 0 ; jeton:  = random(2) + 1 ;
if (jeton=1) then begin
repeat X:=X+1; lancer:  = random(2) ;
until (lancer = 0) ;
end ;
Writeln (X) ;
end.
```

   (a) Expliquer le fonctionnement de ce programme et déterminer quel est le contenu de la variable affichée à la fin.

   (b) Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle " `Repeat ...  until` "est fini ?

2. Ecrire un programme Pascal qui donne la valeur de la variable aléatoire Y.