

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1980

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{R}_+ celui des réels positifs ou nul. On adoptera la convention suivante :

$$\frac{x^0}{0!} = 1 \text{ quel que soit } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

NOTA : Les 3 parties peuvent être traitées indépendamment (on signale dans les parties 2 et 3 les résultats de la partie 1 à utiliser).

Partie I

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on considère les 3 suites définies par :

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad v_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad w_n(x) = v_n(x) + \frac{x^n}{n!}$$

1. Montrer que la suite $(v_n(x))$ est convergente et, en utilisant la formule de MAC-LAURIN, que sa limite est e^x . Montrer que la suite $(w_n(x))$ a la même limite.
2. Démontrer que la suite $(v_n(x))$ est croissante et que la suite $(w_n(x))$ est décroissante à partir d'un certain rang.
3. En utilisant ce qui précède, établir les inégalités :

$$(1) \quad e^x < \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in]0, \ln 2[$$

$$(2) \quad e^x < \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e}{(n+1)!}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in]0, 1[$$

Partie II

Pour toute partie A de \mathbb{N} , Φ_A désignera la fonction définie sur \mathbb{N} par :

$$\Phi_A(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in A \\ 0 & \text{si } k \notin A \end{cases}$$

A toute partie A de \mathbb{N} et tout réel a dans \mathbb{R}_+ , on associe la suite $(s_n^A(a))$ définie par :

$$s_n^A(a) = \sum_{k=0}^n \frac{\Phi_A(k)}{k!} a^k$$

1. Démontrer que la suite $(s_n^A(a))$ est convergente.

2. Le réel $a \in \mathbb{R}_+$ étant fixé, on pose, pour toute partie A de \mathbb{N} :

$$m(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^A(a)$$

Calculer : $m(\emptyset)$; $m(\{0\})$; $m(\{p\})$, $p \neq 0$; $m(\mathbb{N})$.

DANS LES QUESTIONS 3,4,5, on suppose : $a \in]0, \ln 2[$.

3. Démontrer les résultats suivants :

- (a) Si A et B sont deux parties de \mathbb{N} vérifiant $A \subset B$, alors $m(A) \leq m(B)$.
- (b) Pour toute partie A de \mathbb{N} : $m(A) \in [0, 2[$.
- (c) Si A et B sont deux parties disjointes de \mathbb{N} , alors $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

4. (a) Soient A, B deux parties disjointes non vides de \mathbb{N} , et p le plus petit élément de $A \cup B$ (on supposera $p \in A$, et donc $p \notin B$). Démontrer, en utilisant l'inégalité (1) de la première partie :

$$m(B) < \frac{a^p}{p!} \leq m(A)$$

(b) En déduire que si deux parties disjointes A, B vérifient $m(A) = m(B)$, elles sont vides.

5. (a) Démontrer que pour tout couple (A, B) de parties de \mathbb{N} :

$$m(A) - m(B) = m(A \setminus B) - m(B \setminus A)$$

(b) En déduire que l'application $m : A \mapsto m(A)$ est une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ensemble des parties de \mathbb{N} , vers l'intervalle $[0, 2[$ de \mathbb{R} .

Partie III

Soit \mathcal{C} l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle, continues sur $[0, 1]$. On considère l'application U qui, à tout élément f de \mathcal{C} associe l'élément $U(f)$ défini par :

$$(U(f))(x) = \int_0^x f(t) dt$$

On définit, pour tout entier n , l'application U^n par :

$$U^n = U^{n-1} \circ U, \text{ pour } n \geq 1, \text{ et } U^0 = I, \text{ application identique de } \mathcal{C}.$$

- 1. (a) Montrer que U est un endomorphisme de \mathcal{C} .
- (b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$(U^n(f))(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$$

en raisonnant par récurrence et en utilisant une intégration par parties.

- (c) On note V_n l'endomorphisme défini, pour $n \geq 1$, par : $V_n = \sum_{k=1}^n U^k$.
Démontrer les relations : $V_n \circ U = U \circ V_n = V_{n+1} - U$.

2. (a) Vérifier que l'application de \mathcal{C} dans \mathbb{R}_+ définie par :

$$f \mapsto \|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

est une norme sur \mathcal{C} , c'est-à-dire vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall f \in \mathcal{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| \\ \forall (f, g) \in \mathcal{C}, \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \\ \|f\| = 0 \implies f = 0 \end{array} \right.$$

(b) Démontrer que $\|U(f)\| \leq \|f\|$, pour tout f de \mathcal{C} .

3. Soit V l'application qui, à tout élément f de \mathcal{C} , associe l'élément $V(f)$ défini par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad (V(f))(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$$

Démontrer que $\|V(f) - V(f_n)\| \leq \frac{e}{n!} \|f\|$, pour tout entier $n \geq 1$, en utilisant l'inégalité (2) de la première partie.

On admettra que l'on peut en déduire les égalités : $V \circ U = U \circ V = V - U$.

4. (a) Dédurre de **3** que $I - U$ et $I + V$ sont deux isomorphismes de réciproques l'un de l'autre.

(b) Application : trouver la solution f , élément de \mathcal{C} de l'équation intégrale :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) - \int_0^x f(t) dt = e^{-x}$$