Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1980

MATHEMATIQUES

2ème épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, p est un réel donné appartenant à l'intervalle ouvert $]0;1[$; on note $q = 1 - p$.
On désigne par a et b deux nombres reels, solutions du système (1) suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} a + b = q \\ ab = -pq \end{cases}$$

Préliminaires

1. Montrer que le système (1) admet une solution (a, b) telle que :

$$a \neq b, \quad |a| < 1, \quad |b| < 1.$$

   Montrer que a ou b peut être égal a p et déterminer alors numériquement a, b, p.

2. Montrer que quel que soit p, le système (S) suivant, où n désigne un entier naturel, admet au moins une solution (x, y, z).

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^n \\ x + by + b^2 z = b^n \\ x + py + p^2 z = p^n \end{cases}$$

   Montrer que toute solution vérifie $y + qz = \dfrac{a^n - b^n}{a - b}$.

Partie I

On note :
$\mathbb{R}[X]$ I'algèbre sur $\mathbb{R}$ des polynômes a coefficients réels,
$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'algèbre sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 3 réelles.
On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ définie par :

$$(2) \qquad \begin{array}{c} u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = q \\ \forall n \in \mathbb{N}^\times ; u_{n+3} = u_{n+2} - p^2 q u_n \end{array}$$

On note V_n, la matrice colonne $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et A la matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p^2 q & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad V_{n+1} = AV_n$ puis que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times} \setminus \{1\}, \quad V_n = A^{n-1}V_1$.

2. Determiner le polynôme caractéristique P_A de la matrice A.
   Montrer que les valeurs propres de A sont a, b et p.
   La matrice A est-elle diagonalisable quel que soit p ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $R_n = \alpha_n + \beta_n X + \gamma_n X^2$ le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme caractéristique P_A de la matrice A.
   Montrer que $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ est solution du système (S) défini dans la question **2** des préliminaires.

4. On désigne par Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \quad (n \text{ étant le degré de } P)$$

   a pour image par Φ la matrice :

$$\Phi(P) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n, \text{ où } I \text{ désigne la matrice unité de } \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}).$$

   (a) Montrer que Φ est linéaire et que $\Phi(PQ) = \Phi(P)\Phi(Q)$ quels que soient P et Q, éléments de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Vérifier que $\Phi(P_A) = 0$ (P_A polynôme caractéristique de A), où 0 désigne l'élément neutre de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   (c) En déduire successivement :

$$\begin{array}{lrcl} & \forall n & \in & \mathbb{N}, \quad A^n = \alpha_n I + \beta_n A + \gamma_n A \\ & \forall n & \in & \mathbb{N}^{\times}, \quad V_n = \alpha_{n-1} V_1 + \beta_{n-1} V_2 + \gamma_{n-1} V_3 \\ (3) & \forall n & \in & \mathbb{N}^{\times}, \quad u_n = \dfrac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b} \end{array}$$

Partie II

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^{\times}}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même loi, telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^{\times}, \quad P(X_k = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = 1 - p = q$$

La suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^{\times}}$ s'interprète comme une suite d'épreuves se soldant par un succès $(X_k = 1)$ ou par un échec $(X_k = 0)$.
On signale que la question **3.** est indépendante des questions **1.** et **2.**

1. (a) On définit la variable aléatoire Z_2 : nombre d'échecs précédant le deuxième succès.
   Calculer, pour $n \geqslant 2$, la probabilité de I'événement : $(Z_2 = n - 2)$.
   (On remarquera qu'il s'agit de l'événement : " obtenir le deuxième succès à la n-ième épreuve").
   (b) Etant donné un entier naturel $r \geqslant 2$, on considère la variable aléatoire Z_r : " nombre d'échecs précédant le r-ième succès". Calculer, pour $n \geqslant r$, la probabilité de l'événement $(Z_r = n - r)$.

2. On définit les r variables aléatoires suivantes :
   Y_1 : nombre d'échecs précédant le premier succès,
   Y_2 : nombre d'échecs obtenus entre le premier et le second succès,
   etc ...
   Y_r : " nombre d'échecs entre le $(r-1)$-ième succès et le r-ième succès".

   (a) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité s_k de l'événement $(Y_1 = k)$.
   Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} s_k = 1$.
   (b) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'événement $(Y_2 = k)$.
   Exprimer la variable aléatoire Z_r, (définie dans **1.b**) en fonction de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$.
   (c) En déduire I'espérance mathématique et la variance de Z_r.

3. Si dans une suite d'épreuves on obtient deux succès consécutifs, on dit que l'on a réalisé un " doublé ".
n étant un entier naturel, on considère les événements suivants :
A_n est l'événement : " le premier double est obtenu par un succès à la $(n-1)$-ième épreuve et un succès à la n-ième épreuve ".
C'est aussi l'événement :

$$(X_{n-1}=1 \text{ et } X_n=1) \quad \text{et} \quad [(\forall k \in \mathbb{N}^\times),\ (k<n) \Longrightarrow (X_{k-1}=0 \text{ ou } X_k=0)].$$

B_n est l'événement : " un doublé au moins est réalisé dans les n premieres épreuves ".
C'est aussi l'événement :

$$(\exists k \in \mathbb{N}^\times),\ (k \leqslant n) \quad \text{et} \quad (X_{k-1}=1 \text{ et } X_k=1).$$

On désigne par p_n la probabilité de l'événement A_n, et on pose $p_1=0$.

(a) Calculer p_2 et p_3.
Montrer que la probabilité de l'événement B_n est $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k$.
En déduire la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad p_{n+3}=p^2q[1-\sum\limits_{k=1}^{n} p_k]$

(b) Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est solution de I'équation de récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_{n+3}=u_{n+2}-p^2qu_n$$

En utilisant les résultats de **3.a** et la relation (3) de la partie **I**, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \qquad p_n=p^2\,\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}$$