Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1981

MATHEMATIQUES

2ème épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota : les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1

On considère le jeu électronique suivant :

un point lumineux L se déplace par sauts successifs sur un axe d'origine O, et peut à chaque instant se situer en l'un des cinq points P_j d'abscisses j égales à : $\{-2;-1;0;1;2\}$.

Lorsque le point L est en P_j, j élément de $-2;-1;0;1;2$ à l'instant t, la probabilité pour qu'il se positionne en P_k, k élément de $\{-2;-1;0;1;2\}$ à l'instant $t+1$ est fournie par le tableau ci-dessous

instant $t+1 \rightarrow$ instant t $\downarrow$	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2
P_{-2}	0	1	0	0	0
P_{-1}	1/2	0	1/2	0	0
P_0	0	1/2	0	1/2	0
P_1	0	0	1/2	0	1/2
P_2	0	0	0	0	1

Par exemple, si L est en P_0 à l'instant t, il se positionnera en P_{-1} avec la probabilité $1/2$, ou en P_1 avec la probabilité $1/2$.

On suppose qu'à l'instant initial $t=0$, le point lumineux L est en P_0.

1. Déterminer les probabilités de chacun des trois événements suivants

   (a) De l'instant $t=0$ à l'instant $t=n$ inclus, le point lumineux ne s'est positionné ni en P_{-2}, ni en P_2.

   (b) De l'instant $t=0$ à l'instant $t=n$, $n>0$, le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-1} et il se positionnera en P_2 pour la première fois à l'instant $t=n$.

   (c) Le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} avant de se positionner en P_2 pour la première fois.

2. On désigne par X_n la variable aléatoire qui prend pour valeur l'abscisse du point lumineux à l'instant $t=n$.

   (a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_i pour $i=0;1;2;3;4$.
   Calculer l'espérance mathématique et la variance des variables aléatoires X_i pour $i=0;1;2;3;4$.

   (b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_3, X_4).

3. (a) Déterminer la loi de probabilité de X_n+1 en fonction de la loi de probabilité de X_n .

(b) On désigne par a_n la probabilité de l'événement $(X_n = 0)$. Etablir une relation de récurrence de la forme $\alpha a_{n+2} + \beta a_n + \gamma a_{n-2} = 0, \quad n \geqslant 2$.

(c) Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant la relation de récurrence

$$\alpha u_{n+1} + \beta u_n + \gamma u_{n-1} = 0, \qquad n \geqslant 1$$

(d) En déduire a_n. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Problème 2

On désire étudier sur un certain nombre d'années les mouvements migratoires d'une population lors des vacances d'été.

L'observation de cette population a conduit à la construction d'un modèle mathématique dont les hypothèses sont les suivantes :

Hypothèse 1 Le territoire sur lequel évolue la population durant les vacances d'été est divisé en trois régions, notées 1, 2, 3.

Hypothèse 2 Chaque année, tout individu de la population étudiée choisit une région et une seule pour y passer toutes ses vacances d'été.

Hypothèse 3 Le choix d'une région par un individu pour y passer ses vacances d'été est un phénomène aléatoire qui évolue dans le temps à partir d'une année initiale appelée année 1.

On note $A_i(n)$, pour i élément de $\{1; 2; 3\}$ et $n \geqslant 1$, l'événement : " choisir la région i pour y passer ses vacances d'été, l'année n " et $\alpha_1(n) = P(A_1(n)),\ \alpha_2(n) = P(A_2(n)),\ a_3(n) = P(A_3(n))$ les probabilités de choisir l'année n, respectivement les régions 1 , 2, 3 pour y passer ses vacances d'été.

Hypothèse 4 $\alpha_1(i) = 0,2; \quad \alpha_2(1) = 0,45; \quad a_3(1) = 0,35$

Hypothèse 5 La probabilité de choisir la région i, $1 \leqslant i \leqslant 3$ pour y passer ses vacances l'année $n+1$ ne dépend que du choix effectué l'année n.

On note $a_{i,j} = P(A_i(n+1)/A_j(n))$ la probabilité de choisir la région i l'année $n+1$, sachant que l'année n , on a choisi la région j.
On suppose que, quels que soient i , j éléments de $\{1; 2; 3\}$, $a_{i,j}$ est indépendant de l'année considérée et que les $a_{i,j}$ sont les éléments de la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Hypothèse 6 On suppose que la population étudiée reste inchangée durant toutes les années prises en considération dans ce modèle.

1. (a) Soit B_n, l'événement " choisir chaque année la région 2 durant les n premières années ".
   Calculer la probabilité $P(B_3)$ de l'événement B_3.
   Exprimer la probabilité $P(B_n)$ de l'événement B_n en fonction de n.

   (b) Sachant qu'un individu choisit la région 1 l'année 2, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la région 2 l'année 1 ?

   (c) Calculer la probabilité pour qu'un individu change de région entre la première année et la deuxième année.

2. (a) Exprimer, en la justifiant, une relation entre les matrices $\begin{pmatrix}\alpha_1(n+1)\\\alpha_2(n+1)\\\alpha_3(n+1)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\alpha_1(n)\\\alpha_2(n)\\\alpha_3(n)\end{pmatrix}$ puis entre les matrices $\begin{pmatrix}\alpha_1(n+1)\\\alpha_2(n+1)\\\alpha_3(n+1)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\alpha_1(1)\\\alpha_2(1)\\\alpha_3(1)\end{pmatrix}$

   (b) Calculer le déterminant de la matrice M.

   (c) Calculer, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les valeurs propres de M.

   (d) Montrer que, pour tout naturel n supérieur ou égal à 1, la matrice M^n s'écrit sous la forme $M^n = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \lambda^n & 0\\0 & 0 & \overline{\lambda}^n\end{pmatrix}P^{-1}$

   où λ est un élément de $\mathbb{C}$ de module strictement intérieur à 1, $\overline{\lambda}$ son conjugué.

   $P = \begin{pmatrix}1 & x' & x''\\1 & y' & y''\\1 & z' & z''\end{pmatrix}$ est une matrice inversible à éléments complexes

   (on ne cherchera pas à déterminer la valeur des éléments des deux dernières colonnes de P),

   $P^{-1} = \begin{pmatrix}a & a' & a''\\b & b' & b''\\c & c' & c''\end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P

   (on ne cherchera pas ici à calculer la valeur des éléments de P^{-1}).

3. On dit qu'une une suite de matrices $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de type $(m \times q)$ à éléments dans $\mathbb{C}$ converge vers une matrice L de type $(m \times q)$ quand n tend vers l'infini si et seulement si quels que soient i, j, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant q$, la suite $u_{i,j}(n)$ des éléments de la i-ième ligne et la j-ième colonne des matrices U_n converge vers l'élément $\ell_{i,j}$ de L, lorsque n tend vers l'infini.

   On note alors $L = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

   On admettra le résultat suivant :

   Etant donné une suite (U_n) de matrices de type $(m \times q)$ à éléments dans $\mathbb{C}$ qui converge vers la matrice L, lorsque n tend vers l'infini et V W deux matrices telles que les produits $V.L$ et $L.W$ soient définis, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} V.U_n = V.L \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} U_n.W = L.W$$

   (a) Montrer que la suite de matrices $(M^n)_{n\geqslant 1}$ converge et calculer sa limite.

   (b) Soient $U = (u_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}$ et $V = (v_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}$ deux matrices telles que la somme des éléments de chaque colonne de chacune d'elles soit égale à 1.
   Montrer qu'il en est de même pour la matrice $U.V$.

   (c) Déduire de ce qui précède les vapeurs des éléments a, a', a'' de la matrice P^{-1}

   (d) Montrer que les suites $(\alpha_1(n))_{n\geqslant 1}$, $(\alpha_2(n))_{n\geqslant 1}$ et $(\alpha_3(n))_{n\geqslant 1}$, convergent.
   Calculer leurs limites.