Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1982

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota : les deux problèmes sont indépendants.

PROBLEME 1

On se propose d'étudier l'application F définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}dt$$

1. (a) Justifier l'existence de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

   (b) Montrer que F est décroissante et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{\pi}{4}$.

2. (a) Montrer que : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \qquad \frac{2}{\pi}t \leqslant \sin t$.

   (b) En déduire successivement : $\forall x > 0 \quad F(x) \leqslant \frac{\pi}{4x}(1 - e^{-x})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

3. (a) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \left|e^{-a} - e^{-b}\right| \leqslant |a - b|$.

   (b) En déduire que : $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |F(x_1) - F(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$ et que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

4. (a) Pour $x_0 \in \mathbb{R}_+$, justifier l'existence de $H(x_0) = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x_0\sin t}\sin t\ dt$.

   (b) En utilisant par exemple la formule de Taylor-Lagrange, montrer que :

   $$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad \left|e^{-a} - e^{-b} + (a - b)e^{-b}\right| \leqslant \frac{|a - b|^2}{2}$$

   En déduire l'inégalité :

   $$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R}_+\backslash\{x_0\} \quad \left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - H(x_0)\right| \leqslant \frac{\pi}{8}|x - x_0|$$

   Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $F'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

5. A tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on associe la suite définie par

$$\begin{gathered} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = F(u_n) \end{gathered}$$

(a) En utilisant 3-b. , montrer qu'il existe $m \in [0,1[$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |u_{k+1} - u_n| \leqslant m^k |u_1 - u_0|$$

(b) En déduire que pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p > q$:

$$|u_p - u_q| \leqslant \frac{m^q}{1-m} |u_1 - u_0|$$

et que, quel que soit α, la suite associée est une suite de Cauchy et qu'elle converge vers une limite $\ell(\alpha)$ vérifiant

$$F(\ell(\alpha)) = \ell(\alpha)$$

(c) Montrer qu'il existe un seul $x \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $F(x) = x$.
Que peut-on en conclure pour les suites construites précédemment ?

PROBLEME 2

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.
On appellera B la base de E composée des polynômes 1, X et X^2.
Le polynôme F_α étant défini par $F_\alpha = \alpha 1 + X + X^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on désigne par φ_α l'application qui, à un polynôme P de E, associe le polynôme R de E, reste de la division euclidienne du produit $F_\alpha.P$ par le polynôme $X^3 - X$.
$\varphi_\alpha(P)$ est donc le seul polynôme R vérifiant

$$F_\alpha.P = (X^3 - X).Q$$
$$R = 0 \text{ ou degré}(R) < 3$$

1. (a) Déterminer les polynômes $\varphi_\alpha(1)$, $\varphi_\alpha(X)$ et $\varphi_\alpha(X^2)$.
   (b) Montrer que φ_α est une application linéaire de E dans E.
   (c) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \varphi_\alpha - \lambda I_E = \varphi_{\alpha-\lambda}$ où I_E désigne l'application identique de E dans E.
2. Déterminer la matrice M_α de φ_α relativement à la base B.
3. (a) Calculer le déterminant de M_α et discuter la bijectivité de φ_α en fonction du paramètre α.
   (b) Calculer la matrice inverse M_α^{-1} lorsque M_α est inversible.
4. (a) Montrer que $\ker \varphi_0$, noyau de φ_0, est l'ensemble des polynômes de E admettant 1 pour racine.
   Déterminer $\operatorname{Im} \varphi_0$, image de φ_0.
   (b) Montrer que $\ker \varphi_{-2} = \operatorname{Im} \varphi_0$ et $\operatorname{Im} \varphi_{-2} = \ker \varphi_0$.
5. (a) Calculer les valeurs propres de M_α.
   (b) Déterminer les sous-espaces propres de φ_α (on pourra utiliser 1-c).
   φ_α est-elle diagonalisable ?
   (c) Construire une matrice T telle que

$$M_\alpha = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix} T^{-1}$$

6. (a) Montrer que : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$.
   (b) Calculer $\varphi_{-2} \circ \varphi_0$.
   Le résultat obtenu peut-il être déduit (sans calcul) de 4-b ?
   (c) Calculer $(M_\alpha)^k$, $k \in \mathbb{N}$, et en déduire pour $\alpha \neq -1$:

$$(\varphi_\alpha)^k = \frac{(\alpha+2)^k - \alpha^k}{2} \varphi_\gamma, \quad k \in \mathbb{N}^\times, \quad \text{avec } \gamma = \frac{2\alpha^k}{(\alpha+2)^k - \alpha^k}$$

   Exprimer $(\varphi_{-1})^k$ en fonction de k.