Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1982

MATHEMATIQUES

2ème épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota : les problèmes 1 et 2 sont indépendants.

PROBLEME 1

Préliminaires

x désigne un nombre réel, tel que $0 < x < 1$.

a) Calculer pour $n \geqslant 2$ les sommes :

$S_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

$S_2(x) = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$

b) En déduire la somme des séries

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2}$$

Problème

On considère une urne U, contenant des boules rouges et des boules blanches. On note p, $0 < p < 1$, la probabilité de l'événement " tirer une boule rouge de l'urne ".
On effectue des tirages successifs avec remise et l'on arrête ces tirages dès que l'on a tiré pour la deuxième fois une boule rouge.
On note X le nombre total de tirages qu'il a fallu réaliser pour obtenir deux boules rouges.

1. Quelle est la probabilité de tirer une seule boule rouge en $k-1$ tirages avec $k \geqslant 2$?

2. Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance mathématique de X.

3. On note W_n l'événement suivant : " l'obtention de la deuxième boule rouge s'est produite avant d'atteindre le n-ième tirage ".

   (a) Calculer la probabilité π_n de W_n.

   (b) On suppose que $p = 0,25$; déterminer n pour que π_n soit strictement supérieur à $0,95$.

4. L'épreuve précédente est utilisée sous forme de jeu.
   Au début du jeu le joueur mise une somme de 10 francs. A chaque tirage effectué cette somme diminue de 1 franc.
   Le jeu s'arrête, soit lorsque cette somme est nulle, soit lorsque le joueur a obtenu une deuxième boule rouge, le joueur recevant alors deux fois la somme restante.
   On note Y la variable aléatoire correspondant à la somme perçue par le joueur en fin de partie.
   On suppose que $p = \frac{1}{2}$.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

   (b) Calculer l'espérance mathématique de Y.

PROBLEME 2

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé, et on rappelle que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ sont indépendantes si et seulement si :

pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, on a :

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i).P(Y = j)$$

Partie 1

X et Y désignent deux variables aléatoires, distinctes, à valeurs dans le sous ensemble fini de $\mathbb{N}$, $\{0, 1, \ldots, n\}$:

$X \ : \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$,

$Y : \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$.

Pour tout k élément de $\{0, 1, \ldots, n\}$, on note $p_k = P(X = k)$, $\quad q_k = P(Y = k)$.

On définit l'application G_X suivante :

$$G_X : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & G_X(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n \end{array} \right.$$

G_X est appelée fonction génératrice de X.

On remarquera que la distribution de probabilité de la variable aléatoire X est déterminée de façon unique par la fonction génératrice G_X.

1. Déterminer G_X lorsque :

   (a) X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$, et $P(X = 1) = p$, $0 < p < 1$;

   (b) X est une variable binomiale de paramètres n, p, où n désigne un entier naturel et $0 < p < 1$.

2. On note respectivement $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance mathématique de X et la variance de X.

   (a) Exprimer $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

   (b) Retrouver ainsi l'espérance mathématique et la variance d'une variable binomiale.

3. Soit λ un élément de $\mathbb{N}^\times$, et Z la variable aléatoire définie par : $Z = \lambda X$.
   Déterminer la fonction génératrice G_Z de Z en fonction de G_X.

4. On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et on définit la variable aléatoire S par : $S = X + Y$.

   (a) Déterminer la fonction génératrice G_S de S en fonction de G_X et G_Y.

   (b) Retrouver à partir des résultats de la question 4-a les relations entre $E(X + Y)$, $E(X)$, $E(Y)$ et entre $V(X + Y)$, $V(X)$, $V(Y)$. 2è.-ne partie X désigne maintenant une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: $X : \Omega \to \mathbb{N}$.
   Pour tout k élément de $\mathbb{N}$, on note $p_k = P(X = k)$.

5. On considère la série de terme général $u_k(x)$ défini par :

   - si x est élément de $]0,1]$, $u_k(x) = p_k x^k$;
   - $u_0(0) = p_0$, et , pour tout $k \neq 0$, $u_k(0) = 0$.

   Montrer que la série de terme général $u_k(x)$ est convergente, quel que soit x élément de $[0,1]$.
   Pour tout x élément de $[0,1]$, on notera : $G_X(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.

6. Déterminer G_X dans le cas où X suit une loi de Poisson de paramètre λ.