Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1983

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota : la partie I est complètement indépendante des parties II et III. Les parties II et III sont largement indépendantes l'une de l'autre.

Partie I

On considère, pour tout entier naturel p, les intégrales impropres

$$I_p = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx \quad \text{et} \quad J_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1} dx$$

1. Etude de I_p

   (a) Montrer qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que :

   $$\forall x \geqslant M \quad x^p e^{-x} \leqslant \frac{1}{x^2},$$

   et en déduire que I_p existe pour $p \in \mathbb{N}$.

   (b) Exprimer I_{p+1} à l'aide de I_p, puis en déduire la valeur de I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$..

2. Etude de J_p

   (a) Montrer que J_p existe pour $p \in \mathbb{N}^\times$.

   (b) Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^\times,\ \forall x > 0, \quad \frac{x^p}{e^{x-1}} = x^p \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} + \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1}.$$

   (c) Pour $k \in \mathbb{N}^\times$, calculer $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A x^p e^{-kx} dx$.

   (d) Montrer que, pour $x \geqslant 0$, $\quad e^x - 1 \geqslant x$, puis que, pour $p \in \mathbb{N}^\times$,

   $$0 \leqslant \int_0^A \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leqslant \frac{(p-1)!}{n^p}$$

(e) En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}^\times$ et $n \in \mathbb{N}^\times$,

$$\left| J_p - p! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} \right| \leqslant \frac{(p+1)!}{n^p}.$$

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{p+1}}$.
Rappeler pour quelles valeurs de p cette série est convergente et, dans ce cas, exprimer sa somme en fonction de J_p.

Partie II

Soit x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie :

$$u_0 = x; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}} \tag{1}$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\times$, $u_n \geqslant 1$.
2. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est monotone et convergente.
   (b) Déterminer la limite de cette suite.
3. On suppose maintenant que $x \neq 1$ et on considère la série de terme général $v_n = -1 + u_n$.
   (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $v_n > 0$.
   (b) Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?
   (c) En déduire que la suite (P_n) définie par

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k \tag{2}$$

   est convergente. (Ne pas essayer de calculer sa limite).

Partie III

1. A tout couple (a, b) de réels positifs ou nuls, on associe les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = a \\ b_0 = b \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rl} a_{n+1} = & \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = & \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \end{array} \right. \tag{3}$$

   (a) Calculer a_n et b_n en fonction de n dans les deux cas particuliers $a = 0,\ b \geqslant 0$ et $a \geqslant 0, \quad b = 0$.
   (b) Montrer que $a_n \leqslant b_n$ pour $n \geqslant 1$, et que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones pour $n \geqslant 1$.
   (c) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite. Cette limite qui est fonction de (a, b), et qui ne peut être explicitée en général, sera notée $\mathcal{L}(a, b)$.

(d) Montrer que, pour $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$:

$$\mathcal{L}(a,b) = \mathcal{L}(b,a) \tag{4}$$

$$\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a,b) \tag{5}$$

$$\sqrt{ab} \leqslant \mathcal{L}(a,b) \leqslant \frac{1}{2}(a+b) \tag{6}$$

2. On utilise la limite étudiée plus haut pour définir la fonction $F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $F(x) = \mathcal{L}(1,x)$.

(a) Calculer $F(0)$ et $F(1)$. Montrer que F est positive et croissante.

(b) Montrer que, pour $x > 0$:

$$\sqrt{x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2}(1+x) \tag{7}$$

$$F(x) = xF(\frac{1}{x}) \tag{8}$$

$$F(x) = \sqrt{x}F(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}) \tag{9}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(1+x)F(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}) \tag{10}$$

3. En utilisant les résultats de 2 -

(a) Montrer que F est dérivable au point 1 et donner la valeur de $F'(1)$.

(b) Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(c) Montrer que F est continue en 0. Est-elle dérivable en ce point ?

(d) Étudier les limites éventuelles, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\dfrac{F(x)}{x}$ et $\dfrac{F(x)}{\sqrt{x}}$.

4. Pour $x > 0$, exprimer P_n, défini par (1) et (2), en fonction de $F(x)$ et $F(u_{n+1})$. Retrouver ainsi que la suite (P_n) converge et exprimer sa limite en fonction de $F(x)$.