Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1983

MATHEMATIQUES

2ème épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota : les problèmes 1 et 2 sont indépendants.

Problème 1

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Partie 1

Soit p un nombre réel tel que : $0 < p < 1$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont les termes vérifient la relation de récurrence : $u_{n+1} + pu_n - p = 0$, pour $n > 1$.

1. Déterminer les nombres réels α et β tels que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par $v_n = u_n - \alpha$, pour $n \geqslant 1$, vérifie la relation : $v_{n+1} = \beta v_n$.
2. Calculer u_n en fonction de p et u_1.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est convergente et calculer sa limite ℓ en fonction de p.
4. Dans le cas particulier où $u_1 = p = \dfrac{1}{2}$, trouver le plus petit entier naturel n tel que : $|u_n - \ell| < 10^{-3}$.

Partie 2

Soit p un nombre réel tel que : $0 < p < 1$.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont les termes vérifient les relations de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_{n+1} + pv_n - p & = & 0 & \text{si } n \geqslant 1 \\ v_{n+1} + pu_n - p & = & 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{array}\right.$$

1. On définit deux suites $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante, où α et β désignent deux nombres réels :

   $$\left\{\begin{array}{lcll} u'_n & = & u_n - \alpha & \text{si } n \geqslant 1 \\ v'_n & = & v_n - \beta & \text{si } n \geqslant 1 \end{array}\right.$$

   Déterminer α et β pour qu'on ait la relation matricielle suivante, pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$:

   $$\begin{pmatrix} u'_{n+1} \\ v'_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u'_n \\ v'_n \end{pmatrix}$$

   où M est une matrice 2×2 à coefficients réels que l'on déterminera.

2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de M.

3. Déduire de ce qui précède, pour tout entier naturel n , $n \geqslant 1$, les expressions de u_n et v_n en fonction de u_1, v_1, n et p. (On distinguera les cas où n est pair et n est impair).

Problème 2

Les deux parties du problème sont indépendantes.
Dans un stand de tir, un tireur T a une probabilité p, $0 < p < 1$, d'atteindre une cible donnée.
Il effectue des tirs répétés indépendants.

Partie 1

Le tireur T joue une partie selon les règles suivantes :

- Il a gagné (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, plus deux ; on note W cet événement.
- Il a perdu (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins deux ; on note L cet événement.
- La partie s'arrête si et seulement si l'un des deux événements W ou L se produit.

Outre les événements W et L définis ci-dessus, on considérera les événements suivants, où n est un entier naturel non nul:

S_n : le n-ième tir est dans la cible.

E_n : le n-ième tir est en dehors de la cible.

Z_n : la partie n'est pas terminée à l'issue du n-ième tir.

W_n : le tireur T a gagné la partie à l'issue du n-ième tir.

L_n : le tireur T a perdu la partie à l'issue du n-ième tir.

On note : $q = 1 - p$ et $u = 2pq$.

1. (a) Exprimer l'événement Z_2 en fonction des événements S_1, E_1, S_2, E_2.
   (b) Exprimer l'événement Z_4 en fonction des événements Z_2, S_3, E_3, S_4, E_4.
   (c) Calculer les probabilités des événements Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4.
   (d) Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, calculer la probabilité de l'événement Z_n.

2. Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, calculer la probabilité de l'événement W_n et la probabilité de l'événement L_n.

3. On désigne par w et ℓ les probabilités respectives des événements W et L.
   (a) Calculer w et ℓ.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : "la partie ne s'arrête pas".

4. On admettra que le nombre de tirs effectués au cours d'une partie est une variable aléatoire X.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Partie 2

Le tireur T joue une partie selon les nouvelles règles suivantes :

- Il a gagné (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, plus deux ; on note W cet événement.
- Il a perdu (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins trois ; on note L cet événement.
- La partie s'arrête si et seulement si l'un des événements W ou L se produit.

Outre les événements W et L définis ci-dessus, on considérera les événements suivants, où n est un entier naturel non nul:

A_n : à l'issue du n-ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, plus un.

B_n : à l'issue du n-ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors.

C_n : à l'issue du n-ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins un.

D_n : à l'issue du n-ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins deux.

Pour tout entier naturel non nul, on désigne respectivement par a_n, b_n, c_n, d_n , les probabilités des événement A_n, B_n, C_n, D_n ; et on pose $a_0 = c_0 = d_0 = 0$, $b_0 = 1$.

1. Exprimer a_n, b_n, c_n, d_n en fonction de a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1}.
2. On admettra que les séries de termes généraux a_n, b_n, c_n, d_n sont des séries convergentes.
   On désigne par a, b, c et d leurs sommes respectives.
   (a) Déduire de la question 1 quatre relations entre a, b, c, d et calculer a et d.
   (b) Calculer les probabilités w et ℓ des événements W et L.
   (c) Calculer la probabilité de l'événement : "la partie ne s'arrête pas"
   (d) Démontrer qu'il existe une et une seule valeur de p telle que $w = \ell$.