Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1985

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME 1

Soient p un entier naturel $\geqslant 2$, et $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à p (on convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$). On note Δ l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$, associe le polynôme ΔP défini par

$$\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$$

Partie I

1. (a) Vérifier que Δ est une application linéaire.
   (b) Quel est le noyau de Δ ?
   (c) Déterminer le degré de ΔP en fonction de celui de P, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$.
2. On définit les polynômes P_n pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant p$, par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in [\![1,p]\!], \quad \Delta P_n = P_{n-1} \quad \text{et } P_n(0) = 0 \end{cases}$$

   (a) Calculer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.
   (b) Montrer que la famille $(P_n)_{0\leqslant n\leqslant p}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, et que tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$ se décompose sous la forme :

$$P = \sum_{n=0}^{p} \alpha_n P_n \qquad \text{avec} \qquad \alpha_n = (\Delta^n P)(0)$$

   où

$$\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_p[X]} \quad \text{et} \quad \forall n \in [\![1,p]\!], \quad \Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$$

Partie II

1. Soit n un entier de $[\![1, p]\!]$.

   (a) Montrer que $P_n(X) = \dfrac{1}{n!}X(X-1)\dots(X-n+1)$.

   (b) Démontrer que, pour tout k de $\mathbb{Z}$, $P_n(k)$ est dans $\mathbb{Z}$.

   (c) Prouver, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$: $\quad \Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^{p} C_n^k (-1)^{n-k} P(X+k)$.

2. Démontrer que, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   (I) Les composantes de P dans la base $(P_n)_{0 \leqslant n \leqslant p}$ sont dans $\mathbb{Z}$.
   (II) Pour tout k de $\mathbb{Z}$, $P(k)$ est dans $\mathbb{Z}$.

Partie III

1. (a) Ecrire la matrice M de Δ dans la base $(P_n)_{0 \leqslant n \leqslant p}$.

   (b) Calculer M^k pour tout entier naturel k non nul.

2. (a) Quelles sont les valeurs propres de M ?

   (b) Montrer que M n'est pas diagonalisable.

PROBLEME 2

Dans tout ce problème, on désigne par C_f le graphe de la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie 1

1. (a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

   (b) Montrer que f est continue et dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

   (c) Préciser la position de C_f par rapport à sa tangente à l'origine.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - \frac{x}{2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

   (a) Etudier les variations de h sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Montrer qu'il existe un unique réel α strictement positif tel que $h(\alpha) = 0$.
   Ecrire un programme Pascal donnant, par dichotomie, une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

3. (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $h(x)$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.

   (b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

   (c) Tracer la représentation graphique C_f de f dans un repère orthonormé.
   (On donne $\alpha \simeq 1.9$ et $f(\alpha) \simeq 1.1$)

Partie 2

1. Pour $a > 0$, montrer que l'intégrale impropre $K(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-ax} dx$ converge et la calculer.

2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente. On notera I cette intégrale.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = f(x)e^{-2nx}$.
   Montrer que l'intégrale impropre $I_n = \int\limits_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Montrer qu'on peut écrire $\dfrac{1 - e^{-2nx}}{1 - e^{-2x}}$ sous forme d'une somme de n termes.

   (b) Calculer $f(x) - f_n(x)$, et en déduire que $I = 2\sum\limits_{i=0}^{n-1} K(2i + 1) + I_n$.

4. Le but de cette question est de montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
   On remarque que:
$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx + \int_1^{+\infty} f_n(x)dx$$

   (a) On considère la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.
   Montrer que $0,4 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [0, 1]$, puis montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\int_0^1 f_n(x)dx \leqslant 2,5 \int_0^1 xe^{-(2n+1)x}dx \leqslant \frac{2,5}{2n+1}$$

   (b) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[1, +\infty[$, on a $0,8 \leqslant 1 - e^{-2x} \leqslant 1$.
   Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\int\limits_0^{+\infty} x^2 xe^{-(2n+1)x}dx \leqslant \dfrac{2}{2n+1}$, et en déduire une majoration de $\int\limits_1^{+\infty} f_n(x)dx$.

   (c) Conclure.