Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1986

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Remarques : Les quatre exercices sont indépendants.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

Exercice 1

On note f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part, on considère les trois éléments v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$v_1 = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad v_2 = -e_2 + e_3, \quad v_3 = e_3.$$

1. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de v_1, v_2, v_3.
2. Montrer que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On note P la matrice de passage de la base B à la base B' ; calculer P et P^{-1}.
3. Déterminer la matrice A' de l'endomorphisme f relativement à la base B'.
4. Calculer $(A')^2, (A')^3, (A')^n$ puis A^n pour tout entier naturel non nul n.

Exercice 2

On désigne par f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit la fonction $h = f * g$ par : $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt \end{array}$

1. Montrer que $f * g = g * f$.
2. Dans cette question, on suppose que :
   pour $x \leqslant 0$, $f(x) = g(x) = 0$
   et pour $x > 0$, $f(x) = x^p$ et $g(x) = x^q$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
   On pose $I_{p,q} = f * g$.

   (a) Déterminer $I_{p,0}$, $I_{1,1}$ et $I_{1,2}$.

(b) Pour p et q entiers naturels, $q \geqslant 1$, établir une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ et en déduire explicitement $I_{p,q}$.

3. On suppose que f et g sont définies respectivement par $f(x) = |x|$ et $g(x) = x - 1$ pour tout x réel. Déterminer la fonction $f * g$ et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé ; on précisera la tangente à l'origine du repère.

Exercice 3

Une urne contient 3 boules (une bleue, une blanche et une rouge) dont les tirages sont supposés équiprobables. On effectue des tirages successifs d'une boule, avec remise à chaque fois de la boule tirée.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on appelle A_n l'événement : les $n-1$ premiers tirages ont donné la même boule et la $n^{ème}$ boule tirée est différente de celle tirée lors des $n-1$ premiers tirages.

1. Déterminer $p(A_2)$, $p(A_3)$ et $p(A_n)$ pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$.

2. Calculer $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} p(A_n)$.

3. On appelle X la variable aléatoire prenant la valeur n lorsque A_n est réalisé et 0 lorsque A_n n'est pas réalisé ; calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-3x^2} - 3x + 5 \end{array}$.

1. Calculer les dérivées f' et f''. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Tracer la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthonormé, l'unité étant égale à 2cm.
   Quelles sont les coordonnées des points d'inflexion de C_f.

2. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α à l'aide de C_f.

3. Donner une meilleure valeur approchée de α à l'aide du théorème des accroissements finis.