Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1987

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota : les problèmes 1 et 2 sont indépendants.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

Problème 1

On désigne par $\mathbb{R}_5[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5.

1. Montrer que l'ensemble E des polynômes de $\mathbb{R}_5[X]$ divisibles par X^3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[X]$. Quelle est la dimension de E ?

2. On note u l'application de $\mathbb{R}_5[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_5[X]$, associe le polynôme $u(P)$ défini par
$$u(P) = X(P' + P'(0)) - 2(P - P(0))$$
Vérifier que u est une application linéaire.
Pour P élément de $\mathbb{R}_5[X]$, calculer $u(P)$; en déduire le noyau, l'image, les valeurs propres et vecteurs propres de l'application u.
Montrer que u est diagonalisable.

Problème 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^{\times}$ en posant :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n \ln x}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

On notera C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé.

Partie I

1. (a) Quel est le développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ?
   (b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de f_0, puis de f_n pour $n \geqslant 1$
   (c) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable en 1. Que vaut $f_n'(1)$?
   (d) Préciser la position de C_n, par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$, et calculer $f_n'(x)$.
   (b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, f_n est prolongeable par continuité en 0. Pour quelles valeurs de n ce prolongement est-il dérivable à droite en 0 ?

3. (a) Étudier la fonction φ_0 définie sur $\mathbb{R}^\times$ par $\varphi_0(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} - 2\ln x$. Quel est le signe de $f_0'(x)$?
   (b) En déduire les variations de la fonction f_0, et tracer C_0, l'unité étant prise égale à 5 cm.

4. (a) Étudier les fonctions φ_1 et φ_2 définies sur $\mathbb{R}^\times$ respectivement par $\varphi_1(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \ln x$ et $\varphi_2(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$.
   (b) En déduire les variations des fonctions f_1 et f_2, et tracer C_1 et C_2 sur le même graphique que C_0.

Partie II

On sait que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est convergente, et on admettra que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. (a) Justifier, pour $n \geqslant 1$, l'existence de $\int\limits_0^1 f_n(x)dx$.
   (b) Montrer que l'intégrale impropre $\int\limits_0^1 (f_0(x) - f_2(x))x$ est convergente.

   On note $a_1 = \int\limits_0^1 (f_0(x) - f_2(x))x$. Calculer a_1.

   (c) En déduire que l'intégrale impropre $\int\limits_0^1 f_0(x)x$ est convergente.

On note $I = \int\limits_0^1 f_0(x)x$. Le but de cette partie est de calculer I.

2. (a) Pour $n \geqslant 2$, calculer $a_n = \int\limits_0^1 (f_{2n-2}(x) - f_{2n}(x))x$.
   (b) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

3. (a) Établir, en utilisant l'étude de f_1 effectuée à la partie I, que, pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n-1}}{2}$.

   En déduire que $\int\limits_0^1 f_n(x)x$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

(b) On note $S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$. Montrer que $I = \lim_{n \to +\infty} S_n$.

4. (a) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

   (b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$.

   (c) Calculer I.