Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1988

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (3x - 2y, 2x - 4z, y - 3z)$.

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les valeurs propres de A. En déduire que A n'est pas inversible et que A est diagonalisable.
3. Calculer A^2, A^3. En déduire A^n, $n \in \mathbb{N}^{\times}$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \dfrac{1}{4}(x+1)e^{-x}$.

1. Calculer f' et f". Etudier les variations de f'.
   Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution α et que $-1,3 < \alpha < -1,2$.
   En déduire le sens de variation de f. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser les branches infinies de $\mathcal{C}_f$. Tracer $\mathcal{C}_f$.
2. Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que pour tout entier $n > 0$, on a $-1 < u_n < 0$ et que la suite u est décroissante. Trouver sa limite.

EXERCICE 3

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartenant à $]0, 1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$.

1. Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels. Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. Après ces n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   (b) Calculer $p_0 = P(Z = 0), p_1 = P(Z = 1)$. Montrer que $p_1 = npq^{2n--2}(1 + q)$.

(c) Calculer la probabilité conditionnelle $P((Y = h)/(X = k))$, pour k appartenant à $\{0, 1, \dots, n\}$ et h à $\{0, 1, \dots, n-k\}$.

(d) Démontrer $P(Z = s) = \sum_{k=0}^{s} P((X = k) \cap (Y = s - k))$.

(e) Calculer $p_s = P(Z = s)$, et montrer que Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p(1 + q)$.
(On pourra vérifier : $C_n^k C_{n-k}^{s-k} = C_n^s C_s^k$)

EXERCICE 4

1. Vérifier : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$. En déduire la limite quand l'entier n tend vers $+\infty$ de $\int_0^1 \ln(1 + x^n)dx$.

2. Soit u la suite réelle définie par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n}dx$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1 + x^n)dx$$

(On pourra utiliser une intégration par parties.)
En déduire la limite de u_n et celle de $n.u_n$ quand n tend vers $+\infty$.