Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1988

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota
Les deux problèmes sont indépendants.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

PROBLEME 1

On note n un entier naturel, $n \geq 2$, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, I l'identité de $\mathbb{R}^n$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

1. (a) Exprimer $f \circ f$ en fonction de I et de n.
   (b) En déduire que f est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, et calculer f^{-1} en fonction de f.
2. Ecrire la matrice de f relativement à B.
3. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 5$. Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de f ; f est-il diagonalisable ?
4. On revient au cas général.
   (a) Pour tout entier k de l'intervalle $[1; \dfrac{n+1}{2}]$ et tout réel λ, calculer $f(e_k + \lambda e_{n-k+1})$.
   (b) Montrer que, pour chaque entier k de l'intervalle $[1; \dfrac{n+1}{2}[$, il existe deux réels distincts a_k et b_k, que l'on calculera, tels que $e_k + a_k e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de f. Examiner le cas où $2k = n + 1$.
   (c) Montrer que f est diagonalisable.

PROBLEME 2

N.B. : les questions 4., 5. et 6. sont indépendantes de la question 3.
Pour tout n de $N^{\times}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = e^{-n(x+\frac{1}{x})} & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1. Exprimer f_n en fonction de f_1. Montrer que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Etudier les variations de f_n. Tracer approximativement la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé et la situer par rapport à celle de f_{n+1}.
   Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) \leqslant e^{-2n}$.

3. (a) Montrer que, pour tout $a \neq 0$, l'équation d'inconnue x
   $$f_n(x) = a(x-1)$$
   admet une unique solution notée u_n.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.
   (c) L'équation d'inconnue x
   $$f_n(x) = \frac{1}{n}(x-1)$$
   admet une unique solution notée v_n.
   Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.
   (d) Quelle est la pente a_n de la droite joignant le point $A(1,0)$ au point $M_n\,(n, f_n(n))$?
   Montrer que cette pente vérifie l'inégalité $a_n > \dfrac{e^{-n^2}}{n^2}$ quelque soit $n \in N^{\times}$.
   L'équation d'inconnue x
   $$f_n(x) = \frac{e^{-n^2}}{n^2}(x-1)$$
   admet une unique solution notée w_n. Montrer que $n < w_n$, et en déduire la limite de w_n, lorsque n tend vers l'infini.

4. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ fixé, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente.
   Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ de cette série.

5. Pour tout n de $N^{\times}$, on considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.
   On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.
   (a) Démontrer que la fonction F_n est dérivable. Étudier le sens de variation de F_n.
   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f_n(x) < e^{-nx}$.
   En déduire que l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ est convergente.
   Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

6. Montrer que les séries de termes généraux $J_n = \int_0^1 f_n(t)dt$, $K_n = \int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ et I_n sont convergentes.