Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1988

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soit $A = M(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une base et la dimension de $\ker(f)$, de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?
   f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}^\times$.
4. Déterminer tous les réels x tels que $(A - x.I)^2 = I$ (I matrice unité). Existe-t-il un réel x tel que $(A - x.I)^3 = I$?

EXERCICE 2

Soit f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$, I son ensemble de définition, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthomormé (unité 2 cm).

1. (a) Etudier les variations de f. Préciser les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.
   (b) Démontrer : $\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant x$. Cas d'égalité ?
   (c) Tracer $\mathcal{C}$ et D d'équation $y = x$.
2. (a) Démontrer que f réalise une bijection de $[0, 2[$ sur $[0, +\infty[$.
   (b) Expliciter f et tracer sa courbe représentative dans le meme repère que f
3. On considère la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$.
   (b) Prouver que u est croissante.
   (c) Démontrer que u converge et calculer sa limite.

EXERCICE 3

Soit un nombre réel a. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = a2^x & \text{si } x < 0 \\ f(x) = a2^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit la densité d'une variable aléatoire X à valeurs réelles.
   Dans la suite de cet exercice, on prend $a = \dfrac{\ln 2}{2}$.

2. (a) Calculer, si elle existe, l'espérance de X. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X. Tracer la courbe représentative de F.
   (b) Soit un nombre réel x. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement $(X < x)$ sachant que l'événement $(X \geqslant 1)$ est réalisé.

3. Déterminer la fonction de répartition G de la variable aléatoire $Y = 2^{X/2}$.

EXERCICE 4

Soit I la suite de terme général $I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{-x} dx$

1. (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Etudier la convergence de la suite I.

2. Calcul d'une valeur approchée de I_{15}.

   (a) Montrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}, \quad \text{et} \quad : I_n = \frac{n!}{e} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)!} + \frac{n!}{(n+p)!} I_{n+p}$$

   (b) En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

   $$0 \leqslant I_n - \frac{n!}{e} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(n+k)!} \leqslant \frac{n!}{(n+p+1)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)^{p+1}}$$

   (c) Comment peut-on choisir p pour que $0 \leqslant I_{15} - \dfrac{15!}{e} \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{(15+k)!} < 10^{-6}$?
   En déduire là l'aide de la calculatrice une valeur approchée de I_{15} à 10^{-6} près.