Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1989

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota
Les deux problèmes sont indépendants.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

PROBLEME 1

Partie A

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, p et q deux endomorphismes de E tels que :

$$p \circ p = p, \quad q \circ q = q, \quad p \circ q = q \circ p$$

On pose : $f = p + q,\ g = p \circ q$.

1. (a) Vérifier $g \circ g = g$.
   (b) Montrer que les valeurs propres de p et de q sont dans $\{0; 1\}$.
   (c) Démontrer que les valeurs propres de f sont dans $\{0; 1; 2\}$.
2. (a) Démontrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si $\ker(p) \cap \ker(q) \neq \{0\}$.
   (b) Démontrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0\}$.

Partie B

Soient $N \in \mathbb{N}^\times$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes nul ou de degré $\leqslant N$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant N$, on note T_n l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie de la façon suivante :

si $P = \sum\limits_{k=0}^{N} \lambda_k X^k$, avec $\lambda_0, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, alors $T_n(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$.
Ainsi, par exemple, avec $N = 4$:
$T_3(X + X^2 + 2X^3 + X^4) = X + X^2 + 2X^3$ et $T_4(X + X^2) = X + X^2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant N$, T_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_N[X]$.
2. (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant N$: $T_n \circ T_n = T_n$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant N$, déterminer le noyau et l'image de T_n.
   (c) Montrer pour tous n, r de $\mathbb{N}$ tels que $n \leqslant N$ et $r \leqslant N$: $T_n \circ T_r = T_r \circ T_n$.
3. Soient n, r deux entiers naturels tels que $0 < n \leqslant r < N$.

   (a) Comparer $\ker(T_n)$ et $\ker(T_r)$; comparer $\mathrm{Im}(T_n)$ et $\mathrm{Im}(T_r)$.
   (b) Montrer que 0 et 2 sont valeurs propres de $T_n + T_r$.
   (c) $T_n + T_r$ est-il diagonalisable ?

PROBLEME 2

Partie I

1. Montrer que, pour tout réel x de $]-\infty;\frac{1}{4}]$, il existe un réel unique y de $]-\infty;\frac{1}{2}]$ tel que $x = y - y^2$, et calculer y en fonction de x.
   On note f l'application de $]-\infty;\frac{1}{4}[$ vers $]-\infty;\frac{1}{2}]$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$.

2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 4 cm.

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-\infty;\frac{1}{4}[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$ et tout $x \in]-\infty;\frac{1}{4}[$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}(1-4x)^{-n+\frac{1}{2}}$$

Partie II

L'objet de cette partie est de déterminer une approximation de f sur $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ par des fonctions polynômiales.

1. (a) Montrer, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$ et tout $x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$:

$$f(x) = Q_n(x) + R_n(x)$$

   où $Q_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!}x^k$ et $R_n(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)t.$

   (b) Calculer Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$.

2. (a) Pour $x \in [0;\frac{1}{4}[$ fixé, quelle est la borne supérieure de l'application de $[0,x]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $t \longmapsto \frac{x-t}{1-4t}$?

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$ et tout $x \in [0;\frac{1}{4}[$:

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{(4x)^n}{2\sqrt[3]{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt[3]{n}}$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$ et tout $x \in]-\frac{1}{4};0]$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{(-4x)^n.\,|x|}{(n+1)\sqrt[3]{n}} \leqslant \frac{1}{4(n+1)\sqrt[3]{n}}$$

4. Donner un majorant de $|f(x) - Q_n(x)|$, indépendant de x pour $x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$, et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.

5. (a) Déterminer le plus petit entier $N \in \mathbb{N}^\times$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \left(n \geq N \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{6.10^{-4}(n+1)\sqrt[3]{n}} < 1\right)$$

   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \left(n \geq N \Longrightarrow \left|R_n(-\frac{1}{6})\right| < 10^{-4}\right)$.

Partie III

On étudie dans cette partie une autre méthode d'approximation de f sur $[0;\frac{1}{4}[$ par des fonctions polynômiales.

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{array}{c} P_0(x) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) = x + (P_n(x))^2 \end{array}$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4.

2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de P_n et de $P_{n+1} - P_n$ sont des entiers naturels. En déduire que, pour tout $x \in [0;+\infty[$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (b) Montrer (par récurrence sur n) que, pour tout $x \in [0;\frac{1}{4}]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad P_n(x) < f(x)$.

   (c) Démontrer que, pour tout $x \in [0;\frac{1}{4}]$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.