Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1990

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soient f et g les endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont les matrices, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et de g.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $H(\alpha)$ la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$H(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -2 & 3-\alpha & 4-\alpha \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $H(\alpha) = \alpha F + (1-\alpha)G$.
   (b) Calculer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\times$, $(H(\alpha))^n$.

EXERCICE 2

ln désigne la fonction logarithme népérien.
On considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x) = 1 - \frac{1}{4}(x + \cos x + \ln(1+x))$$

1. (a) Calculer la dérivée f' de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
   En déduire que, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

(b) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ une unique solution que l'on notera a. (On pourra étudier la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$).

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) Montrer que $u_0 \leqslant a \leqslant u_1$ et que, pour tout entier naturel n, $u_{2n} \leqslant a \leqslant u_{2n+1}$.

(b) Dresser sur le modèle suivant un tableau où figurent des valeurs approchées par défaut des nombres u_{2n}, des valeurs approchées par excès des nombres u_{2n+1}, et des valeurs approchées par excès des nombres $u_{2n+1} - u_{2n}$.

n	u_{2n}	u_{2n+1}	$u_{2n+1} - u_{2n}$
0	0	0,75	0,75
1	...	...	...
2	...	...	...
3	...	...	...
4	...	...	...

En déduire une valeur approchée de a à 10^{-4} près.

EXERCICE 3

1. On rappelle que la série géométrique de terme général x^n est convergente pour $x \in]-1; 1[$, et que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est égale à $\frac{1}{1-x}$. On rappelle également que la fonction S ainsi définie sur $]-1; 1[$ est indéfiniment dérivable et que, pour tout entier naturel k, sa dérivée $k^{\text{ème}}$ $S^{(k)}$ est définie sur $]-1; 1[$ par

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

Démontrer que pour tout $x \in]-1; 1[$ et pour tout entier naturel k,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

2. Soit p un nombre réel tel que $0 < p < \frac{2}{3}$.

Dans un pays, la probabilité q_n qu'une famille ait exactement n enfants est de $\frac{1}{2}p^n$ quand $n \geqslant 1$; par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir un garçon est de $\frac{1}{2}$.

(a) Calculer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant. Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.

(b) Soient n un entier naturel tel que $n \geqslant 1$ et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. On considère une famille de n enfants ; calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.

(c) Soit un entier $k \geqslant 1$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.

(d) Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

EXERCICE 4

ln désigne la fonction logarithme népérien.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$.

1. (a) Quelle est la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$?

   (b) Calculer I_0.

2. Calculer I_1.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$; en déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

   (b) Montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4. (a) Etablir, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1}J_n$.

   (b) Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?