Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1990

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLEME 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 ; E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. Pour tout entier $k \in [0; n]$, μ_k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mu_k(t) = t^k$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in [0; n]$, l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{0} t^k e^t dt$ est convergente .

2. Soit f un élément de E. Montrer qu'on peut définir une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)e^t dt.$$

   Cette fonction g dépend de f et est notée $L(f)$.

3. (a) Calculer $L(\mu_0),\ L(\mu_1),\ L(\mu_2)$.

   (b) Montrer que, pour tout entier $\in [\![0, n-1]\!]$: $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$.
   En déduire $L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum\limits_{j=0}^{k} \dfrac{(-1)^j}{j!}\mu_j$.

   (c) Montrer que, pour tout élément f de E , $L(f)$ appartient à E.

   On considère l'application $L\ : f \mapsto L(f)$ de E vers E.

4. (a) Montrer que L est une application linéaire et injective.

   (b) Ecrire la matrice M représentant l'endomorphisme L de E dans la base $(\mu_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.
   Montrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1} (on pourra utiliser 3. b.).

5. (a) Soient λ une valeur propre de L, et f un vecteur propre de L associé à la valeur propre λ.
   Montrer que λ est non-nul et que, pour tout réel x , $(1-\lambda)f(x) = \lambda f'(x)$.
   Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}x} f(x)$.
   Montrer que φ est constante.

   (b) En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de L.Es
   t-ce que L est diagonalisable ?

PROBLEME 2

N.B. La partie C est largement indépendante des parties A et B.
ln désigne le logarithme népérien.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on note $u_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln n$.

Partie A : Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on note $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que v_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $-\dfrac{1}{2n^2}$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$?
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note γ la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie B : Expression Intégrale de γ.

1. Montrer que l'intégrale $I = \int\limits_0^1 \dfrac{1-e^{-x}}{x}dx$ existe, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, l'intégrale $I_n = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{x}\left(1-\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\right)dx$ existe.
2. (a) Montrer que, pour tout $t \in]-1,+\infty[$: $\ln(1+t) \leqslant t$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ \forall x \in [0,n],\quad \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, étudier les variations de la fonction $\varphi_n : [0;\sqrt{n}[\to \mathbb{R}$ définie par :
   $$\varphi_n(x) = x + n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)$$
   (d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ \forall x \in [0;n],\quad \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)e^{-x} \leqslant \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers I.
4. Montrer que les intégrales $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx$ et $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{e^{-y}}{y}dy$ existent et sont égales.

   On note $J = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}dx$, et , pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $J_n = \int\limits_1^n \dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n dx$.
5. Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers J.
6. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, l'intégrale $K_n = \int\limits_0^1 \dfrac{1-(1-x)^n}{x}dx$ existe.
   (b) Etablir , pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$: $\quad K_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
7. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$: $\quad I_n - J_n = K_n - \ln n$.
   (b) En déduire $\quad \int\limits_0^1 \dfrac{1-e^{-x}-e^{-\frac{1}{x}}}{x}dx = \gamma$.

Partie C : Calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

On utilise ici le résultat de la question B7b :

$$\gamma = I - J \qquad \text{où} \qquad I = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$$

1. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$ et tout $x \in [0;1]$:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leqslant e^{-x} \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$$

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$:

$$\sum_{\ell=0}^{2n-1} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)} \leqslant I \leqslant \sum_{\ell=0}^{2n-2} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)}$$

   puis

$$-\frac{1}{(2n)!2n} \leqslant I - \sum_{\ell=0}^{2n-2} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)} \leqslant 0.$$

   (c) Donner une valeur approchée de I à $0,5.10^{-3}$ près.

2. (a) Montrer : $\forall x \in [1,+\infty[, \quad 0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}dy \leqslant \frac{e^{-x}}{x}$.

   (b) Vérifier que le réel $x_0 = 7$ satisfait l'inégalité : $\frac{e^{-x_0}}{x_0} < 0,25.10^{-3}$.

   (c) On admet que $\int_1^7 \frac{e^{-y}}{y}dy$ vaut $0,2193$ à $0,25.10^{-3}$ près .
   Donner une valeur approchée de J à $0,5.10^{-3}$ près.

   (d) Conclure.