Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1991

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME 1

Notations

$\mathcal{B}$ est la base canonique du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, Id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^4$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sa matrice relativement à $\mathcal{B}$, g est l'endomorphisme de C^4 dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pour tout $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$, on note $M_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est M_A.

Partie A

1. Déterminer les valeurs propres de g et, pour chaque valeur propre de g, déterminer une base du sous-espace propre associé. Est-ce que g est diagonalisable ?

2. Soit $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$.

   (a) Montrer que f_A est combinaison linéaire de $\mathrm{Id}, g, g \circ g, g \circ g \circ g$.

   (b) En déduire les valeurs propres de f_A.

   (c) Dans cette question 2-c., et celle-ci seulement, on suppose $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = -2$. Déterminer pour chaque valeur propre de f_A la dimension du sous-espace propre associé.

Partie B

1. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, tel que $\beta \neq 0$, et $A = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur (α, β) pour qu'il existe $X \in \mathbb{C}^4$ tel que : $f_A(X) = (0, 0, 0, 0)$ et $X \neq (0, 0, 0, 0)$.

2. Trouver quatre nombres complexes α, β, u, v tels que, en notant $A = (\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\beta, \alpha+3\beta)$ et $B = (u, u+v, u+2v, u+3v)$, on ait :

$$\beta \neq 0 \quad \text{et} \quad u \neq 0 \quad \text{et} \quad M_A M_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEME 2

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $\quad I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx.$

Partie I : Calcul de I_1

1. Montrer que l'intégrale $\quad I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx \quad$ est convergente.

2. Vérifier que, pour tout réel $x \neq -1$, $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)$.

3. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 1) - 2\sqrt{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Calculer la fonction dérivée de f . En déduire I_1.

Partie II : Etude de la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale $I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$ est convergente .

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$3nI_{n+1} = (3n-1)I_n$$

   Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente.

3. Soient a un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et n un entier supérieur ou égal à 1.
   Montrer les trois inégalités suivantes :

$$\int\limits_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leqslant a, \qquad \int\limits_a^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leqslant \frac{1-a}{(1+a^3)^n}, \qquad \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leqslant \frac{1}{3n-1}$$

4. Déduire de la question précédente la limite de la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$.

Partie III Etude de séries numériques associées à la suite $(I_n)_{n \geqslant 1}$.

1. On considère les trois suites définies par :
   pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = n^{1/3} I_n$, $v_n = \ln u_n$, $w_n = v_{n+1} - v_n$.

   (a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 de w_n en fonction de $\frac{1}{n}$.
   Quelle est la nature de la série numérique de terme général w_n ?

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers un nombre réel h strictement positif. (On ne cherchera pas à calculer h).

(c) Indiquer la nature de la série numérique de terme général I_n.

2. On considère la série numérique de terme général $a_n = (-1)^{n-1} I_n$ pour $n \geqslant 1$.

   (a) La série numérique de terme général a_n est-elle absolument convergente ?

   (b) Soit $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, pour tout entier $n \geqslant 1$. Vérifier que : $\quad A_n = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1 - \dfrac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \dfrac{1}{1+x^3}} \cdot \dfrac{1}{1+x^3} dx.$

   (c) Montrer que la série numérique de terme général a_n est convergente.

   (d) Soit t un nombre réel strictement positif.

   A l'aide d'un changement de variable simple calculer l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{t^3 + x^3} dx$.

   En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.