Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1992

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$
Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a_1 a_2 a_3 \neq 0$;
on considère

- $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$
- A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le terme situé à la ligne i et colonne j vaut $a_i a_j$ pour tout (i, j) de$\{1, 2, 3\}$,
- f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{a}$ est vecteur propre de f, associé à une valeur propre que l'on déterminera.
2. Déterminer $\ker(f)$.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f ; donner une telle base et écrire la matrice de f dans cette base.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2

On note $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \,]1, +\infty[\,, \quad f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geqslant 3$:

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leqslant f(k-1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant$ 2n, on note $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$

3. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$:

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \int_2^n f(x)\,dx \leqslant S_n - \frac{1}{n\ln(n)}$$

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leqslant S_n \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}$$

   (c) Établir : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n))$$

4. En utilisant le résultat de la question 2., montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant v_n - \ell \leqslant \frac{1}{n\ln(n)}$$

   (b) En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

EXERCICE 3

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

1. Montrer les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

2. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et $N-2$ boules rouges. Ces boules sont indiscernables au toucher.
On tire successivement les N boules sans remettre les boules tirées dans l'urne.
On note X_1 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte.

   (a) Soient i et j deux entiers compris entre 1 et N .
   Calculer la probabilité P_{ij} pour que $X_1 = i$ et $X_2 = j$.
   (On distinguera le cas $i = j$ et le cas $i \neq j$) .

   (b) Déterminer les lois des variables aléatoires X_1 et X_2.
   Est-ce que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes ?
   Calculer les espérances et variances des variables aléatoires X_1 et X_2.

   (c) On note X la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'on obtient pour la première fois soit la boule blanche soit la boule verte.
   On note Y la variable aléatoire égale au rang du tirage à partir duquel on a obtenu la boule blanche et la boule verte.
   Remarque : en fait $X = \inf(X_1, X_2)$ et $Y = \sup(X_1, X_2)$
   Par exemple, si on a tiré rouge, rouge, verte, rouge, blanche, alors $X_1 = 5$ et $X_2 = 3$ et $X = 3$ et $Y = 5$
   Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.
   Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y.

EXERCICE 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ f(x) = x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

On se propose d'étudier la suite réelle (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \int_0^1 f(t - u_n)\, dt$$

1. Étude du cas $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$
   On suppose $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$
   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que, si $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right)$.
   En déduire que, pour tout entier positif ou nul n, $u_n \leqslant 1$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente ; déterminer sa limite.
2. Étude des cas $u_0 < 0$ et $u_0 > 1$.
   (a) On suppose $u_0 < 0$.
   Calculer u_1. En déduire l'étude de la suite (u_n).
   (b) On suppose $u_0 > 1$.
   Calculer u_1, puis, pour tout entier positif n,u_n. Que dire de la suite (u_n) ?
3. Interprétation graphique .
   On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x + \int_0^1 f(t - x)\, dt$$

   (a) Calculer pour tout nombre réel x la valeur de $g(x)$.
   Construire le graphe de g dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).
   (b) Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n) dans les cas suivants :

$$u_0 = -2; \quad u_0 = 0; \quad u_0 = 2$$