Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1992

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME 1

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante sauf la question II-3 qui utilise les résultats de I.

Partie préliminaire

On considère les deux matrices à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour a et b réels, on pose $M_{a,b} = aA + bB$.
Enfin, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $M_{a,b}$, c'est-à-dire $\mathcal{E} = \{M_{a,b} \quad / \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   Quelle est sa dimension ?
2. Exprimer en fonction de A et B les matrices suivantes : A^2, AB, BA, B^2.
3. Est-ce que le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{E}$?
   Est-ce que ce produit est commutatif ?

Partie I : Eléments propres des matrices de $\mathcal{E}$.

1. Montrer que $B^3 + B^2 - 2B = 0$.
2. (a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B.
   (b) Montrer que les vecteurs propres de B sont des vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ? Est-ce que B et A sont diagonalisables ?
3. Soit $M_{a,b}$ une matrice de $\mathcal{E}$.
   (a) Montrer que les vecteurs propres de B sont des vecteurs propres de $M_{a,b}$.
   (b) Préciser, en fonction de a et b, les valeurs propres de $M_{a,b}$. Est-ce que $M_{a,b}$ est diagonalisable ?

Partie II : Exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}$

Soit $M_{a,b}$ une matrice de $\mathcal{E}$ telle que $(a,b) \neq (0,0)$.

On considère les deux matrices suivantes : $M_1 = A + B,\ M_2 = A - 2B$.

1. (a) Calculer en fonction de M_1 et M_2 les matrices suivantes :
$$(M_1)^2, \quad M_1M_2, \quad M_2M_1, \quad (M_2)^2$$
   (b) Montrer que (M_1, M_2) est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$.
   (c) On pose $M_{a,b} = xM_1 + yM_2$.
   Exprimer x et y en fonction de a et b.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   (a) Calculer $(M_1)^n$ et $(M_2)^n$.
   (b) En déduire l'expression de $(M_{a,b})^n$ en fonction de n, a, b, M_1 et M_2.
   (c) On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(M_{a,b})^k$ avec la convention suivante : $(M_{a,b})^0 = I$, matrice unité d'ordre 3.
   Montrer qu'il existe deux réels λ_n et μ_n tels que : $\quad S_n = I + \lambda_n M_1 + \mu_n M_2$.
   Montrer que les suites (λ_n) et (μ_n) convergent vers des réels λ et μ que l'on déterminera. On rappelle que, pour tout réel x,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

3. On pose alors : $\quad e^{M_{a,b}} = I + \lambda M_1 + \mu M_2$.
   Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de $e^{M_{a,b}}$. Est-ce que $e^{M_{a,b}}$ est diagonalisable ?

PROBLEME 2

Pour tout réel x, on note $E(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'entier relatif $E(x)$ tel que $E(x) \leqslant x < E(x)+1$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{R}$ l'application définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f_\alpha(x) = x^\alpha E\left(\frac{1}{x}\right)$$

Partie I

1. Etudier la continuité de f_0 sur $[\frac{1}{4}; 2]$, et tracer la courbe représentative de f_0 sur cet intervalle (repère orthonormé, unité 5 cm).

2. Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ fixé, la limite de $f_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
   Pour quelles valeurs de α f_α peut-elle être prolongée par continuité à droite en 0 ?

3. Tracer les représentations graphiques de f_2, f_1, $f_{\frac{1}{2}}$ sur l'intervalle $[\frac{1}{4}; 2]$ (sur trois figures distinctes, repère orthonormé, unité 5 cm).

Partie II

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^\times$, on note :
$$I_\alpha(n) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f_\alpha(x)dx \quad \text{et} \quad J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^{n} I_\alpha(p)$$

1. Calculer $I_\alpha(n)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^\times$.
2. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\times$:

$$J_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha+1}\left(\left(\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p^{\alpha+1}}\right) - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$ fixé.
   (a) Exprimer $J_\alpha(n)$ sous forme d'une seule intégrale.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad J_\alpha(n) \leqslant \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$.
   (c) Conclure quant à la convergence de la suite $(J_\alpha(n))_{n\geqslant 1}$.
4. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\times \quad J_0(n) = \sum\limits_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p}$.
   (b) Etablir : $\forall p \in \mathbb{N}^\times \quad \frac{1}{p} \geqslant \int\limits_p^{p+1} \frac{dx}{x}$.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $J_0(n) \geqslant \int\limits_2^{n+2} \frac{dx}{x}$.
   (d) Conclure quant à la convergence de la suite $(J_0(n))_{n\geqslant 1}$.

Partie III

On note $M = 3 \lim\limits_{n\to+\infty} J_2(n)$, c'est-à-dire $M = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on note

$$u_n = \frac{1}{n^3}, \quad v_n = \frac{1}{(n-1)n(n+1)}, \quad w_n = v_n - u_n$$

1. (a) Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times \setminus \{1\}, \quad v_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}$$

   et calculer a, b, c.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$: $\sum\limits_{p=2}^{n} v_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}$.
   (c) Montrer que la série $\sum\limits_{p\geqslant 2} v_p$ converge et calculer sa somme.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, calculer $\sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} v_p$.
2. (a) Calculer w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
   (b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$: $w_n = \frac{v_n}{n^2}$.
   (c) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$: $0 \leqslant \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} w_p \leqslant \frac{1}{2n^4}$.
3. (a) Déterminer un entier naturel n tel que $\frac{1}{2n^4} \leqslant \frac{10^{-7}}{2}$.
   (b) En déduire une valeur approchée de M à 10^{-7} près.