# Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1993

---

# MATHEMATIQUES

## 1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

---

## Problème 1

### Partie I

**1 -** Soit $E$ un espace vectoriel réel; on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de $E$.
Pour tout $\phi \in \mathcal{L}(E)$, on note $\phi^0 = Id$, $\phi^1 = \phi$ et pour tout entier natarel $n$ tel que $n \geqslant 2$, $\phi^n = \phi^{n-1} \circ \phi$.
Soient

- $p$, $q$ deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ non nuls et tels que $p + q = Id$.
- $a$, $b$ deux réels distincts et non nuls.
- $f$ un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $f = ap + bq$ et $f^2 = a^2p + b^2q$.

a. Montrer que $(f - aId) \circ (f - bId) = (f - bId) \circ (f - aId) = 0$ et $f - aId = (b - a)q$ et $f - bId = (a - b)p$.

b. En déduire que $p \circ q = q \circ p = 0$.

c. Montrer que $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$.

**2 -** Prouver que pour tout entier $n$, $f^n = a^np + b^nq$.

**3 -** a. Calculer $f \circ (\frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q)$.

b. Montrer que $f$ est bijective et exprimer $f^{-1}$ à l'aide de $p$, $q$, $a$ et $b$.

**4 -** a. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de $f$ est $\{a, b\}$.

b. En supposant que $E$ est de dimension finie, $f$ est-il diagonalisable?

## Partie II

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 13 & -60 & 20 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 24 & -5 \end{pmatrix}$.

**1 -** Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^2 = \alpha M + \beta Id$. Et déterminer $\alpha$ et $\beta$.

**2 -** En déduire deux réels $a$ et $b$ tels que: $(M - aId)(M - bId) = 0$.

**3 -** Montrer qu'il existe un couple $(A, B)$ d'éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on exprimera en fonction de $M$ et de $Id$ tel que: $\begin{cases} A + B = Id \\ aA + bB = M \end{cases}$

**4 -** En déduire la valeur de $M^n$ pour tout entier $b$.

# Problème II

Les parties **I** et **II** sont indépendantes. La résolution de la partie **III** utilise des résultats des parties **I** et **II**.

## Partie I

**A -** Soit $f$ l'application de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}] : \quad f(x) = \dfrac{x}{\sin x} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de $f$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que $f$ est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
3. Prouver que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Tracer la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé (unité: 5cm).

**B -** Soit $g$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe un réel $A \geqslant 0$, tel que pour tout réel

$$x > 0 : \left| \int_0^1 \sin(xt)g(t)\ dt \right| \leqslant \frac{A}{x}$$

2. En déduire lalimite quand $x$ tend vers $+\infty$ de $\int_0^1 \sin(xt)g(t)\ dt$.

**C -** Soit $P$ un polynôme à coefficients réels tel que $P(0) = 0$

1. on nomme $\phi$ l'application de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \dfrac{P(x)}{\sin(\frac{x\pi}{2})}$.

   a. Exprimer $\phi$ à l'aide de la fonction $f$ étudiée au A.

b. En déduire que $\phi$ possède un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Le définir.

2. Montrer enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 P(t) \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi t}{\sin\frac{\pi t}{2}}\, dt = 0$.

## Partie II

On désigne par $E$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par $h$ l'application de $E$ dans $E$ qui, à tout polynôme $P$ associe le polynôme $Q = h(P)$ défini par: $\forall x \in \mathbb{R}, : Q(x) = \int\limits_0^x (t-x)P(t)\, dt + \dfrac{x^2}{2} \int\limits_0^1 P(t)\, dt$

### A - Etude de $h$.

1. Soit $P \in E$ et $Q = h(P)$

   a. Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, : Q'(x) = x \int\limits_0^1 P(t)\, dt - \int\limits_0^x P(t)\, dt$.

   b. Calculer $Q''$.

2. Montrer que $h$ est une application linéaire et que le noyau de $h$ est l'ensemble des polynômes constants et l'image de $h$ est l'ensemble des polynômes $Q$ tels que $Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0$. (On pourra calculer pour un tel polynôme $Q$, $h(Q'')$)

### B - On considère la suite de polynômes $(P_n)$ définie par:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & : \quad P_1(x) = \dfrac{x^2}{2} - x \\ \forall n \geqslant 2 & : \quad P_n = h(P_{n-1}) \end{cases}$$

1. Calculer $P_2$ et $P_3$.
2. Quelles sont les valeurs de $P_n(0)$, $P_n'(0)$ et $P_n'(1)$ pour $n \geqslant 2$?
3. Exprimer en fonction de $n$ le monôme de plus haut degré de $P_n$.
4. Déduire de A1 la reltion: $\forall n \geqslant 2$, $P_n'' = \int\limits_0^1 P_{n-1}(t)\, dt - P_{n-1}$.

   Etablir alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ les deux relations:

$$\forall n \geqslant 2 : \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\, dt = \frac{1}{(k\pi)^2} \int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\, dt$$

$$\forall n \geqslant 1 : \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\, dt = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}$$

## Partie III

### A -

1. Etablir, pour tout $N$ entier naturel non nul: $\forall t \in ]0,\pi], : \sum\limits_{k=1}^{N} \cos(kt) = \dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{2}$.

2. En déduire, pour $N$ et $n$ entiers naturels non nuls, $\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n} \int\limits_0^1 P_n(t) \left( \dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{2} \right) dt.$

   puis, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^{2n}} = -\pi^{2n} \int\limits_0^1 P_n(t)\ dt.$

3. Application:

   Montrer que les séries $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^4}$, et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^6}$ peuvent s'exprimer sous la forme $\dfrac{\pi^a}{b}$ où $a$ et $b$ sont des entiers que l'on calculera.

**B -**

1. On pose $P_n = \sum\limits_{p=0}^{2n} a_{n,p} X^p$.

   Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\begin{cases} a_{n,0} = 0, \\ a_{n,1} = 0, \\ a_{n,2} = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{p=0}^{2n-2} \dfrac{a_{n-1,p}}{p+1}, \\ a_{n,p} = -\dfrac{a_{n-1,p-2}}{p(p-1)} \qquad \forall p \in [\![3, n]\!]; \end{cases}$$

2. Le but de cette question est d'écrire un programme permettant de calculer le réel $\beta_n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^{2n}} = \beta_n \pi^{2n}$, pour $n \in [\![1, 25]\!]$ donné par l' utilisteur.

   a. Quel type de variable informatique est adapté à la représentation d' un polynôme?

   b. Ecrire un programme en PASCAL qui calcule le coefficients de $P_n$ puis le réel $\beta_n$ et l'affiche.