Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1994

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère la matrice $A(a)$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de $A(a)$, pour $a \in \mathbb{R}$.
2. Etudier suivant les valeurs du réels a, l'inversibilité de $A(a)$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
3. On suppose dans cette question 3. seulement : $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq -1$.
   (a) Montrer que $A(a)$ est diagonalisable.
   (b) Calculer, pour chacune des valeurs propres de A, un vecteur propre de $A(a)$ associé à cette valeur propre.
4. (a) La matrice $A(0)$ est-elle diagonalisable?
   (b) calculer $(A(0))^2$, $(A(0))^3$, et $(A(0))^n$ pour tout entier naturel n non nul.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$

1. (a) Dresser le tableau des variations de f.
   (b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
   (c) Tracer la courbe représentative de f (repère orthonormé, unité 5cm)
   (Cette courbe admet un point d'inflexion qu'on ne cherchera pas à déterminer)
2. (a) Montrer que l'inage par f du segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est le segment $\left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$.

(b) On définit la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \left[0, \dfrac{1}{2}\right] & \rightarrow & \left[0, \sqrt{\dfrac{2}{e}}\right] \\ x & \mapsto & 2\sqrt{x}e^{-x} \end{array}$

Démontrer que φ admet une fonction réciproque continue que l'on notra g.

(c) Dresser le tableau des variations de g.

(d) Démontrer que g est dérivable en tout point de l'intervalle $\left]0, \sqrt{\dfrac{2}{e}}\right[$

(e) La fonction g est-elle dérivable en 0 ? En $\sqrt{\dfrac{2}{e}}$?

3. (a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Démontrer que l'équation d'inconnue x :

$$\varphi(x) = \frac{1}{n}$$

admet une unique solution dans le segment $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. On notera a_n cette solution.

(b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante.

(c) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers 0.

EXERCICE 3

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendemment les uns des autres.
La probabilité qu'un colis expédié à l'étranger soit déterioré est égale à $0,1$.
On s'interresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :

- N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés.
- X est la variable aléatoire égale au nombre de colis déteriorés.
- Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état.

On a donc $N = X + Y$

1. Soit n un entier naturel; calculer pour tout entier naturel k la probabilité conditionnelle suivante :

$$P_{(N=n)}(X = k)$$

2. Donner la loi du couple (X, N) puis montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre 0,5.

3. Déterminer la loi de Y.

4. (a) Si i et j sont deux entir naturels, calculer la probabilité : $P((X = i) \cap (Y = j))$

   (b) X et Y sont-elles indépendantes ?

EXECICE 4

On pose pour tout entier n non nul

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n \, dx \quad \text{et} \quad I_0 = e - 1$$

1. (a) Etablir, pour tout entier n : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
   (b) Montrer, pour tout enier n, que : $I_n \geqslant 0$
   (c) Déduire des questions 1a et 1b que pour tout n :

   $$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$

   (d) Quelle est la lmite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (e) Montrer que $I_n \sim \dfrac{e}{n}$
2. Soit a un réel différent de I_0. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

   $$\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & e - (n+1)\, u_n \end{cases}$$

   Montrer que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$
   (On pourra considérer la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $D_n = |u_n - I_n|$)