Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1995

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME 1

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.
On définit la matrice $A_n = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, carrée d'ordre n à coefficients réels, de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 & : \quad a_{i,i+1} = i; \\ \text{si } 2 \leqslant i \leqslant n & : \quad a_{i,i-1} = n+1-i \\ \text{si } j \neq i-1 \text{ et } j \neq i+1 & : \quad a_{i,j} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & n-2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On suppose, dans cette question seulement, $n = 3$: $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer les valeurs propres de A_3.

   (b) La matrice A_3 est-elle diagonalisable?

   (c) La matrice A_3 est-elle inversible ?

2. Dans toute la suite du problème, E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E: $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$.
   On note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A_n.

   (a) Calculer $u(1)$, $u(X^{n-1})$, et, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n-2$, $u(X^j)$.

   (b) Démontrer que, pour tout élément $P(X)$ de E: $u(P(X)) = (n-1)XP(X) - (X^2-1)P'(X)$ (où $P'(X)$ désigne la dérivée de $P(X)$) .

3. Dans cette question, λ désigne un nombre réel. On suppose que λ est valeur propre de l'endomorphisme u, et on considère un vecteur propre $P(X)$ associé à cette valeur propre.

   (a) On suppose: $\lambda \neq n-1$. Montrer que 1 est racine de $P(X)$.

   (b) On suppose: $\lambda \neq 1-n$. Montrer que -1 est racine de $P(X)$.

   (c) On suppose: $\lambda = n-1$.
   Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et un entier naturel non nul s tels que $P(X) = (X+1)^s T(X)$ et $T(-1) \neq 0$.
   Montrer que : $s = n-1$.
   Montrer que $T(X)$ est un polynôme constant et non nul.

   (d) On suppose: $\lambda = 1-n$.
   Montrer qu'il existe un réel non nul a tel que $P(X) = a(X-1)^{n-1}$.

   (e) On suppose: $\lambda \neq 1-n$ et $\lambda \neq n-1$.
   Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et deux entiers naturels non nuls r et s tels que $P(X) = (X-1)^r(X+1)^s T(X)$ et $T(-1) \neq 0$ et $T(1) \neq 0$.
   Montrer que : $\begin{cases} 1 \leqslant r \leqslant n-2, \\ s = n-1-r, \\ \lambda = n-1-2r \end{cases}$
   Montrer que $T(X)$ est constant et non nul.

4. (a) Pour tout entier naturel r tel que $0 \leqslant r \leqslant n-1$, calculer $u[(X-1)^r(X+1)^{n-1-r}]$.

   (b) La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
   Démontrer que $\mathcal{C} = \big((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\big)_{0 \leqslant r \leqslant n-1}$ est une base de E.

5. La matrice A_n est-elle inversible ?

PROBLEME 2

Le but du problème est l'étude de l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(0) = 1$ et, pour tout x de $\mathbb{R}^\times$,

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

On note r l'application de $]-1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $r(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$

1. *Etude globale de F sur $\mathbb{R}^\times$*

   (a) Montrer: $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant 1$

   (b) En utilisant le changement de variable $y = -t$, étudier la parité de F.

   (c) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x \in]0,+\infty[,\ xF'(x) = -F(x) + r(x^4)$.

   (d) Montrer: $\forall x \in]0,+\infty[,\ r(x^4) \leqslant F(x)$, et en déduire que F est décroissante sur $]0,+\infty[$.

2. *Etude locale de F en 0*

   (a) Montrer que F est continue en 0.

   (b) i. Etablir: $\forall u \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+u}} - (1 - \dfrac{1}{2}u) \leqslant \dfrac{3}{8}u^2$.

      ii. En déduire que F admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 , et déterminer celui-ci.

      iii. Montrer que F est dérivable en 0, et calculer $F'(0)$.

   (c) Etablir que F' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0, et déterminer celui-ci.

(d) Etablir que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3. *Étude locale de F en $+\infty$*

   (a) i. On note h l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

   En utilisant le changement de variable $z = \frac{1}{t}$, former une relation entre $h(x)$ et $h(\frac{1}{x})$, pour $x \in]0,+\infty[$.

   ii. En déduire: $\forall x \in]0,+\infty[,\ xF(x) + \frac{1}{x}F(\frac{1}{x}) = 2F(1)$.

   (b) i. En déduire: $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

   ii. Montrer: $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = 0$.

4. (a) Ecrire un programme Pascal de calcul de $F(1)$ par la méthode des rectangles avec 1000 pas.
   On admettra que $F(1)$ admet $0,93$ comme valeur approchée à 10^{-2} près.

   (b) Tracer la courbe représentative de F (on n'étudiera ni la concavité, ni les points d'inflexion).