Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1996

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère les matrices carrées réelles d'ordre 3 suivantes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et exprimer J comme combinaison linéaire de I et A^2

   (a) Calculer les valeurs propres de A (on trouvera trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 que l'on rangera de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

   (b) Pour chaque entier k de $\{1, 2, 3\}$, calculer un vecteur propre X_k associé à la valeur propre λ_k de A, tel que l'élément de la première ligne de X_k soit égal à 1.

   (c) En déduire une matrice carrée réelle P d'ordre 3, inversible, de pemière ligne égale à $(1, 1, 1)$ telle qu'en notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, on ait $A = PDP^{-1}$.

2. Soient a, b et c des réels et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

   (a) Exprimer M comme combinaison linéaire de I, A et J, puis comme combinaison linéaire de I, A et A^2.

   (b) En déduire une matrice diagonale réelle Δ d'odre 3 telle que $M = P\Delta P^{-1}$, où P est la matrice obtenue à la question 2.c.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1. (a) Montrer que$f$ est paire.
   Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   (unités: 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

   (b) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Justifier : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$

   (c) Montrer que pour tout réel x: $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$u_0 = 0 \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \in [0, \dfrac{1}{2}]$

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \qquad \text{puis} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

   (d) Ecrire un programme PASCAL permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leqslant x \leqslant \ln 2 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé (unité 5cm).

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.

   (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (b) Montrer que X admet une espérance et calculer l'espérance de X.

   (c) On pose $Y = |X|$.
   Déterminer la fonction de répartition G de Y. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y.

Exercice 4

Pour tout entier naturel n, on note $I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{-x} dx$

1. (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
   (b) En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.
2. A l'aide d'une intégration par parties, établir que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$$

   (a) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant I_n - \dfrac{1}{(n+1)e} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$
   (b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.