Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1996

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème 1

Partie I

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme P_n par :

$$P_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1} (1 - X^2)^k X^{n-2k}$$

c'est-à-dire, si l'on note $E(\frac{n}{2})$ la partie entière de $\frac{n}{2}$:

$$P_n = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1} (1 - X^2)^k X^{n-2k}.$$

1. Vérifier que $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$, $P_2 = 4X^2 - 1$.
   Calculer P_3.

2. Etudier la parité du polynôme P_n suivant la parité de l'entier naturel n.

3. (a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout réel dt :
   $$\sin(n+1)t = \sin t . P_n(\cos t).$$
   (On pourra développer $(\cos t + i \sin t)^{n+1}$ et étudier la partie imaginaire.)

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le polynôme P_n vérifie la relation :
   $$(n^2 + 2n)P_n - 3XP_n' - (X^2 - 1)P_n'' = 0$$
   (On pourra dériver deux fois dans la relation obtenue à la question 3.a.)

4. (a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout réel t :
   $$\sin(n+2)t + \sin nt = 2 \cos t \sin(n+1)t.$$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
   $$P_{n+1} - 2XP_n + P_{n-1} = 0$$

   (c) Montrer, en utilisant la relation précédente, que P_n est un polynôme de degré n et déterminer le coefficient dominant a_n de P_n, c'est-à-dire la coefficient de X^n dans P_n.

Partie II

Dans cette partie, n désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B}_0$ la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de E. Soit Φ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe le polynôme $\Phi(P)$ défini par

$$\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''$$

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E.
2. (a) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer $\Phi(X^k)$.
   (b) Déterminer une base de l'image de Φ.
   (c) Déterminer une base du noyau de Φ.
3. On considère les polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_n$ définis dans la première partie.
   (a) Vérifier que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E.
   (b) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer $\Phi(P_k)$. (On pourra utiliser le résultat de la question 3.b. de la première partie.)
   (c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ.
   (d) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer l'ensemble S_k des polynômes P de E tels que $\Phi(P) = P_k$.

Problème 2

On considère l'application $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin dt)^x dt.$$

En particulier : $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

Etude de f

1. Montrer que f est décroissante et est positive ou nulle.
2. Démontrer : $\forall x \in [1; +\infty[, \quad (x+1)f(x+1) = xf(x-1)$.
   On pourra intégrer par parties $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{x+1} dt$, en remarquant $(\sin t)^{x+1} = (\sin t)^x \sin t$.
   On note $g : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in [0; +\infty[: \quad g(x) = (x+1)f(x+1)f(x)$.
3. (a) Montrer que g est 1-périodique, c'est-à-dire : $\forall x \in [0; +\infty[,\ g(x+1) = g(x)$.
   (b) En déduire : $\forall x \in [0; +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x+n) = g(x)$.
   (c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = \dfrac{\pi}{2}$.
4. (a) Soit $x \in [0; 1]$.
      i. En utilisant 1., montrer $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant (x+n+1)f(n+1)f(n+2) \leqslant g(x+n) \leqslant (x+n+1)f(n)f(n+1)$.

ii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{n+x+1}{n+2} \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{n+x+1}{n+1}$.

iii. Démontrer : $g(x) = \frac{\pi}{2}$.

(b) En déduire : $\forall x \in [0; +\infty[, \quad g(x) = \frac{\pi}{2}$.

5. (a) Établir: $\forall x \in [1; +\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

(b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Convergence et somme de la série de terme général $(-1)^n f(n)$

On note, pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(k)$.

1. (a) Montrer que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. (On pourra utiliser 1.1. et I.5.)

(b) En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n f(n)$.
On considère l'application $\varphi : [0; \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0; \frac{\pi}{2}]$, par : $\varphi(t) = \frac{1}{1+\sin t}$.

2. (a) Montrer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{1+\cos u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{2\cos^2 \frac{u}{2}}$.

(b) Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)dt$.

3. On note, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\quad : D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)dt - S_n$.

(a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$D_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+\sin t} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sin^k t \right) dt = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n+1} t}{1+\sin t} dt$$

(b) En déduire : $\lim_{n\to+\infty} D_n = 0$.

(c) Quelle est la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(n)$?