Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1997

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLEME

On note E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{array}$$

   est un produit scalaire sur E.
   on note $\|\|.$ la norme associée à ce produit scalaire.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ et de degré inférieur ou égal à n-1, et, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, e_i l'application de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$: $t \mapsto t^{i-1}$.
   On rappelle que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E_n.

2. Calculer, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $\Phi(e_i, e_j)$.
   On considère la matrice carrée réelle d'ordre n :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \ldots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \ldots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

3. Etude du cas $n = 2$

   (a) Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2.

   (b) La matrice H_2 est-elle diagonalisable ?

   (c) Montrer que la matrice H_2 est inversible et calculer son inverse.

   Dans toute la suite du problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

4. Etablir que la matrice H_n est diagonalisable.

5. (a) Soient $P \in E_n$, $Q \in E_n$.
On note $a_1, \dots, a_n$ les réels tels que $P = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$, $b_1, \dots, b_n$, les réels tels que $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i e_i$, A et B les matrices-colonnes définies par : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.
Montrer : $\Phi(P, Q) = {}^t A H_n B$ où ${}^t A$ désigne la transposée de A.
(b) En déduire que les valeurs propres de la matrice H_n sont toutes strictement positives.
(c) La matrice H_n est-elle inversible ?

6. Soit $f \in E$. On note, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\beta_i = \Phi(e_i, f)$.
On considère les matrices-colonnes B et A_0 définies par $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $A_0 = H_n^{-1} B$.
On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les réels tels que $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, et P_0 le polynôme défini par : $P_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.
On considère l'application $d : \begin{array}{ccc} E_n & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \|P - f\| \end{array}$
(a) Montrer : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \Phi(e_i, P_0 - f) = 0$.
(b) En déduire : $\forall Q \in E_n$, $\Phi(Q, P_0 - f) = 0$.
(c) Etablir :
$$\forall P \in E_n, \ \|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2 .$$
(d) Démontrer que d admet un minimum et que ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.
(e) Montrer : $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.
(f) **Un exemple** :
On choisit ici $n = 2$ et $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left|t - \dfrac{1}{3}\right| \end{array}$.
Calculer P_0 et $d(P_0)$, et donner une valeur approchée décimale de $d(P_0)$ à 10^{-8} près.

DEUXIEME PROBLEME

Etude de la suite de terme général $M_n = \frac{n^n}{n!} e^{-n}$

1. Pour tout entier naturel non nul n, on définit $v_n = -1 + n \ln(1 + \dfrac{1}{n})$, où ln désigne le logarithme népérien.
(a) Montrer qu'il existe un réel α strictement négatif tel que $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}$.
(b) En déduire la nature de la série de terme général v_n et montrer que la suite de terme général $V_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ admet pour limite $-\infty$.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on définit $M_n = \dfrac{n^n}{n!} e^{-n}$.

(a) Montrer, pour tout entier naturel non nul n : $v_n = \ln\left(\dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right)$.

(b) En déduire la limite de la suite de terme général M_n.

Etude d'une famille de fonctions.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1. Donner le tableau des variations et une représentation graphique de f_1, puis de f_n pour $n \geqslant 2$.
   On ne déterminera pas les éventuels points d'inflexion.
   Vérifier que M_n est la borne supérieure de f_n.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction F_n sur $[0, +\infty[$ par $F_n(x) = \int\limits_0^x f_n(t)dt$.

   (a) Soit x un réel positif ou nul. Etablir une relation entre $F_{n+l}(x)$, $F_n(x)$ et $f_{n+l}(x)$.
   En déduire, pour tout entier naturel non nul n :
   $$F_n(x) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} f_n(t)dt$ est convergente et vaut 1.

Etude de la suite de terme général $u_n = F_n(n)$.

1. Prouver, pour tout entier naturel non nul n :
   $$u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} f_{n+1}(t)dt - f_{n+1}(n)$$
   En déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers un réel L vérifiant $0 < L \leqslant 1$.

2. Déterminer une valeur approchée décimale par défaut à 10^{-1} près de u_2.
   En déduire un nouvel encadrement de L.

3. Soit h la fonction définie sur $[0, 1]$ par $h(t) = \dfrac{t}{2-t}e^{2-2t}$.

   (a) Montrer : $\forall t \in [0, 1],\ 0 \leqslant h(t) \leqslant 1$.

   (b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall x \in [0, n],\ \dfrac{f_n(x)}{f_n(2n-x)} = \left(h(\dfrac{x}{n})\right)^n$.

   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \forall x \in [0, n], \quad f_n(x) \leqslant f_n(2n-x)$.

   (d) En utilisant l'inégalité précédente, montrer, pour tout entier naturel non nul n :
   $$u_n \leqslant \int_0^n f_n(2n-t)dt \leqslant \int_n^{+\infty} f_n(t)dt$$

En déduire : $L \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Détermination de la limite de la suite (u_n) par un raisonnement probabiliste.

Soient n variables aléatoires indépendantes $X_l, X_2, \ldots, X_n$, suivant une loi de Poisson de paramètre 1.
On note $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$
On rappelle que Y_n suit une loi de Poisson.

1. Déterminer l'espérance de Y_n.
2. Exprimer la probabilité $P(Y_n \leqslant n)$ en fonction de u_n.
3. A l'aide du théorème de la limite centrée, que l'on énoncera avec soin, trouver la valeur de L.