Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1998

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1998

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

La fonction logarithme népérien est notée ln .

1. Soit $x \in [-1;1[$.

   (a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;1[$:

   $$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;x]$:

   $$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$$

(c) Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)}$$

(d) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$.

2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

   Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

EXERCICE 2

Dans l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3, on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3 .

   (b) En déduire que A n'est pas inversible et que A admet 0 pour unique valeur propre.

   (c) Déterminer une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

   (d) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. On note, pour tout réel a, $M(a) = I + 2\,a\,A + 2\,a^2\,A^2$, et E l'ensemble des matrices $M(a)$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$.

   (a) Calculer, pour tout couple (a, b) de réels, le produit $M(a)M(b)$ et montrer que ce produit appartient à E.

   (b) En déduire que, pour tout réel a, $M(a)$ est inversible et préciser son inverse.

3. Soit a un réel non nul.

   (a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $M(a)$.

   (b) Calculer $(M(a) - I)^3$.
   En déduire que $M(a)$ admet 1 pour seule valeur propre.
   Préciser une base du sous-espace propre de $M(a)$ associé à la valeur propre 1.

   (c) La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 3

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p , $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

   (a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

   (b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

   On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^\times)^2$ de la façon suivante :

   pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^\times)^2, (X = i \text{ et } Y = j)$ est l'événement

   $''$ les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{ième}$

   est blanche
   ou
   les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{ième}$ est verte $''$.

   Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

   (b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

   (c) Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

3. Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}^\times)^2$:

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

4. (a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

   (b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

   (c) Etablir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes (on pourra envisager $P(X = 1 \text{ et } Y = 1)$).

   (d) Démontrer que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.