Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1998

MATHEMATIQUES

3éme épreuve bis (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une régle graduée est autorisée.

Exercice 1

$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On considère les matrices d'ordre 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de A et préciser, pour chaque valeur propre, une base du sous espace propre associé.
La matrice A est-elle diagonalisable?
On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Vérifier: $A = PDP^{-1}$ et $B = PEP^{-1}$.

On se propose de déterminer l'ensemble S des matrices X de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant:

$$(1) \quad \begin{cases} AXB = 0 \\ BXA = 0 \end{cases}$$

4) Montrer que S est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

5) (a) Soit $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$; on note $Y = P^{-1}XP$.
Montrer que X vérifie (1) si et seulement si Y vérifie:

$$(2) \quad \begin{cases} DYE = 0 \\ EYD = 0 \end{cases}$$

(b) Déterminer l'ensemble des matrices Y de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant (2).

(c) En déduire une base de S et la dimension de S.

Exercice 2

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher: une noire, une blanche et une verte.
On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention de la première boule verte.
On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante:

- X prend la valeur k si la première boule verte est obtenue au k^e tirage.
- Y prend la valeur n si on a obtenu n boules blanches avant l'apparition de la première boule verte.
- Z prend la valeur l si on a obtenu l boules noires avant l'apparition de la première boule verte.

Ainsi $X = Y + Z + 1$.

1) (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X?

(b) Calculer son espérance et sa variance.

2) Pour tout triplet (k, n, l) de $\mathbb{N}^3$, montrer:

- si $k \neq n + l + 1$ alors $P(X = k \text{ et } Y = n \text{ et } Z = l) = 0$
- si $k = n + l + 1$ alors $P(X = k \text{ et } Y = n \text{ et } Z = l) = C_{k-1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$

En déduire la loi du couple (X, Y).

3) On admettra que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x tel que $0 < |x| < 1$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty} C_k^n x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$$

(a) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

(b) Vérifier que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

(c) En déduire l'espérance et la variance de Y.

4) Est-ce que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes?

5) Déterminer la loi du couple (Y, Z).

6) En comparant la variance de X avec celle de $Y + Z$, déterminer la covariance du couple (Y, Z).

Exercice 3

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$.

1. Vérifier que f est paire et étudier les variations de f.
2. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int_x^{2x} \dfrac{dt}{t^4+1}$ existe.

   On définit la fonction réelle F sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_x^{2x} \dfrac{dt}{t^4+1}$.

3. (a) Etudier le signe de F.

   (b) Etudier la parité de F.

4. (a) Montrer que, pour tout réel strictement positif: $\frac{x}{16x^4+1} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x^4+1}$.
   (b) En déduire les limites de F en$+\infty$ et $-\infty$.

5. (a) Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée F'.
   Vérifier, pour tout réel x : $(1-14x^4)F'(x) \geqslant 0$.
   (b) Dresser le tableau de variations de F sur $[0,+\infty[$.
   On admettra qu'une valeur approchée de $14^{-1/4}$ est $0,52$ et qu'une valeur approchée du maximum de F est $0,37$.
   (c) Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé (unité 5 cm).

6. (a) Montrer, pour tout réel x strictement positif:

$$\frac{x}{16x^4(16x^4+1)} \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4} - F(x) \leqslant \frac{x}{x^4(x^4+1)}$$

   (b) En déduire que $F(x)$ est équivalent à $\frac{7}{24x^3}$ au voisinage de $+\infty$.

7. (a) Montrer:

$$\forall n \in N \quad \forall t \geqslant 0 \qquad \left| \frac{1}{1+t^4} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{4k} \right| \leqslant t^{4n+4}$$

   (b) En déduire que, pour tout réel x de $]0,\frac{1}{2}[$, la série

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{2^{4n+1}-1}{4n+1} x^{4n+1}$$

   converge.
   (c) Montrer, pour tout réel x de $]0,\frac{1}{2}[$:

$$F(x) = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{2^{4n+1}-1}{4n+1} x^{4n+1}$$