Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1998

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations :

E désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles.
n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
E_n désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout entier naturel non nul k, X^k désigne la fonction polynôme $t \longmapsto t^k$.
Une fonction polynôme P non nulle est dite unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1 (c'est-à-dire que, si d est le degré de P, alors $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$, où a_0, $a_1, \cdots , a_{d-1}$ sont des réels).

PARTIE I : Etude d'un produit scalaire.

1. (a) Montrer que, pour toute fonction polynôme P de E, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, dt$ est convergente.

   (b) Pour tout entier naturel k, on note $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$.

   Déterminer une relation entre I_k et I_{k+1} . En déduire que $I_k = k!$.
   On considère l'application notée $< .,. >$ de $E_n \times E_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$< P, Q >= \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt$$

2. (a) Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E_n.

   (b) Pour tout couple $(i\, ,\, j)$ d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n, calculer $< X^i, X^j >$.
   Dans la suite du problème, E_n est muni de ce produit scalaire.

3. (a) Construire une famille orthogonale $(Q_0,\, Q_1,\, Q_2)$ de trois fonctions polynômes telle que pour tout k de $\{0,\, 1,\, 2\}$, Q_k soit unitaire et de degré k (on pourra utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt).
   On vérifiera que $Q_2 = X^2 - 4X + 2$.

(b) Montrer pour tout couple (u,v) de réels :

$$\int_0^{+\infty} (t^2+ut+v)^2\, e^{-t}dt = < Q_2, Q_2 > + (u+4)^2 < Q_1, Q_1 > + (u+v+2)^2 < Q_0, Q_0 >$$

(c) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ qui à tout couple (u,v) de réels associe l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (t^2+ut+v)^2\, e^{-t}dt$$

Déduire de la question précédente que H admet un minimum que l'on calculera.

PARTIE II : Construction d'une base orthogonale.

Soit Φ l'application définie sur E_n par :

$$\forall P \in E_n, \qquad \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X)$$

c'est-à-dire que $\Phi(P)$ est la fonction polynôme définie pour tout réel t par :

$$\Phi(P)(t) = t\,P''(t) + (1-t)P'(t)$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n et déterminer la matrice associée à Φ relativement à la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ de E_n .

2. (a) Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$. Montrer que la famille $(\Phi(X^j) + kX^j)_{0 \leqslant j \leqslant k}$ est liée.
   En déduire que $-k$ est valeur propre de Φ.
   (b) Montrer que Φ est diagonalisable.
   (c) Montrer que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1.
   En déduire que, pour tout k appartenant à $\{0, \cdots, n\}$, il existe une unique fonction polynôme unitaire P_k vérifiant $\Phi(P_k) = -k\,P_k$.
   (d) Déterminer, pour tout k appartenant à $\{0, \cdots, n\}$, le degré de P_k .
   (e) Vérifier que $P_0 = Q_0, \quad P_1 = Q_1, \quad P_2 = Q_2$.

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall (P,Q) \in (E_n)^2, \qquad < \Phi(P), Q > = -\int_0^{+\infty} t\,P'(t)\,Q'(t)\,e^{-t}dt$$

   Indication : on pourra comparer la dérivée de la fonction $(t \mapsto tP'(t)e^{-t})$ avec la fonction $(t \mapsto \Phi(P)(t)\ e^{-t})$.
   (b) En déduire que Φ est un endomorphisme symétrique de E_n .
   (c) En déduire que la famille $(P_0,\, P_1, \cdots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n .

PARTIE III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

On note $a = 2 - \sqrt{2}$ et $b = 2 + \sqrt{2}$ les deux racines de P_2 .

1. (a) Déterminer deux réels α et β tels que, pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 1, on ait : $\int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, dt = \alpha\, P(a) + \beta\, P(b)$

   (b) Vérifier : $\int_0^{+\infty} P_2(t)\, e^{-t}\, dt = \alpha\, P_2(a) + \beta\, P_2(b)$.

   (c) Soit P une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3 .
   Montrer qu'il existe deux fonctions polynômes Q et R, chacune de degré inférieur ou égal à 1, telles que $P = Q\, P_2 + R$.
   Montrer : $< P_2, Q >= 0$.
   En déduire : $\int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, dt = \alpha\, P(a) + \beta\, P(b)$.

   Dans la suite du problème, on considère une fonction f réelle quatre fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et dont la dérivée quatrième $f^{(4)}$ est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

   Soit M un réel tel que : $\forall t \in [0, +\infty[, \quad |f^{(4)}(t)| \leqslant M$.

2. (a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer une fonction polynôme T de degré inférieur ou égal à 4 telle que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant |f(t)| \leqslant T(t)$$

   En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t}\, dt$ converge.

   (b) Soit D l'application de E_3 dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$\forall P \in E_3, \quad D(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b))$$

   Montrer que D est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

   (c) En déduire l'existence d'un unique polynôme S de E_3 tel que :

$$S(a) = f(a), \quad S'(a) = f'(a), \quad S(b) = f(b), \quad S'(b) = f'(b)$$

3. Soit x_0 un réel positif ou nul, différent de a et de b.

   On définit la fonction g sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad g(t) = f(t) - S(t) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{(P_2(x_0))^2}(P_2(t))^2$$

   (a) Vérifier que g s'annule en a, b et x_0 .

   (b) En déduire que g' admet au moins quatre zéros deux à deux distincts (dont a et b), puis qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $g^{(4)}(c) = 0$
   (On étudiera avec soin le cas $a < x_0 < b$ et on expliquera pourquoi les autres cas sont similaires).

   (c) En déduire : $f(x_0) - S(x_0) = \dfrac{(P_2(x_0))^2}{4!} f^{(4)}(c)$,

   puis : $|f(x_0) - S(x_0)| \leqslant \dfrac{(P_2(x_0))^2}{4!} M$.

(d) Etablir : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad |f(x) - S(x)| \leqslant \frac{(P_2(x))^2}{4!} M$.

(e) En déduire : $\left| \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-x}\, dx - \alpha f(a) - \beta f(b) \right| \leqslant \frac{M}{6}$.

4. **Application :**
Soit $f\ :\ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par : $f(t) = \frac{1}{10+t}$.

En admettant que $0.0915 \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}) + \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) \leqslant 0.0916$,

donner une valeur décimale approchée de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t}\, dt$. On en indiquera la précision.