Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1999

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème 1

Notations :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On identifie les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ d'ordre n avec les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $< .,. >$ .. défini par:

si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors $< X, Y >= \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.

En identifiant les matrices de $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ avec les réels, on a: $< X, Y >= {}^tXY$.

- I_n désigne la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
- A_n est la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général $a_{i,j}$ est égal à 1 si $|i-j| = 1$ et égal à 0 sinon.

Ainsi, par exemple, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A_3 est diagonalisable.
   Déterminer une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $A_3 = PDP^{-1}$.

2. Soit $\theta \in]0; \pi[$. On désigne par S_θ l'ensemble des suites réelles $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $s_0 = 0$ et pour tout entier naturel k, $s_{k+2} - 2\cos\theta\ s_{k+l} + s_k = 0$.

   Montrer que, si la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à S_θ, alors pour tout entier naturel k: $s_k = s_1 \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$.

   En déduire que S_θ est un espace vectoriel réel de dimension 1.

3. Soit λ une valeur propre réelle de A_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre (non nul) associé à λ.

   On note m le plus grand des réels $|x_1|$, $|x_2|, \ldots, |x_n|$.

(a) Montrer: $\begin{cases} \bullet & \lambda x_1 = x_2 \\ \bullet \forall k \in [\![2, n-1]\!], & \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \bullet & \lambda x_n = x_{n-1} \end{cases}$

Montrer pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$: $|\lambda|\,|x_k| \leqslant 2m$, et en déduire $|\lambda| \leqslant 2$.

(b) On suppose $|\lambda| < 2$.

Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$.

Montrer que la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ vérifie:

$$\begin{cases} \bullet \forall k \in [\![1, n]\!], & s_k = x_k \\ \bullet & s_{n+1} = 0 \end{cases}$$

En déduire qu'il existe un entier p de $[\![1, n]\!]$ tel que $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$.

Pour tout entier p de $[\![1, n]\!]$, on note $\theta_p = \dfrac{p\pi}{n+1}$, $\lambda_p = 2\cos\theta_p$ et $X_p = \begin{pmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$.

(c) Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Montrer que λ_p est valeur propre de A_n et que X_p, est un vecteur propre associé à λ_p.

(d) Montrer que $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs propres de A_n et que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

4. Soit U_n, la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $u_{p,q} = \sin\dfrac{pq\pi}{n+1}$, $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$.

5. Montrer que U_n est inversible et déterminer la matrice D_n de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que:

$$D_n = U_n^{-1} A_n U_n$$

6. (a) Montrer pour tout couple (p, q) de $[\![1, n]\!]^2$: $\lambda_p\ {}^tX_pX_q = \lambda_q\ {}^tX_pX_q$.

En déduire que la base $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est orthogonale et que, pour tout couple (p, q) de $[\![1, n]\!]^2$ tel que $p \neq q$, on a: $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin k\theta_p \sin k\theta_q = 0$.

(b) Montrer, pour tout p de $[\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos 2k\theta_p = 0$.

En déduire que, pour tout entier p de $[\![1, n]\!]$, on a: $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2 k\theta_p = \dfrac{n+1}{2}$.

(c) En déduire $U_n^2 = \dfrac{n+1}{2} I_n$, puis $A_n = \dfrac{2}{n+1} U_n D_n U_n$.

Problème 2

On considère l'application $f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel t de $[0, 1[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si} \quad t \in]0, 1[\\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue sur $[0, 1[$.

(b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,1[$ et calculer $f(t)$ pour tout réel t de $]0,1[$

(c) Etablir que $f'(t)$ tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque t tend vers 0, et que f est de classe C^1 sur $[0,1[$.

(d) Montrer, pour tout réel t de $[0,1[$: $\quad \ln(1-t)+\dfrac{t}{1-t} \geqslant 0$.

(e) Dresser le tableau de variation de f . On précisera la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 1.

(f) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. (On n'étudiera pas la dérivée seconde de f et on admettra que f est convexe.)

2. (a) Montrer que, pour tout réel x de $[0,1]$, l'intégrale $\int\limits_0^x f(t)dt$ existe. (On distinguera les cas $x \in [0,1[$ et $x=1$.)

   On note $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel x de $[0,1]$, par $g(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$.

   (b) Montrer que g est continue sur $[0,1]$, de classe C^2 sur $[0,1[$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0,1[$.

   (c) Etablir que $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

   (d) Dresser le tableau de variation de g. On admettra qu'une valeur approchée de $g(1)$ à 10^{-2} près est : $1,65$.

   (e) Etablir que g est convexe sur $[0,1[$.

   (f) Tracer l'allure de la courbe représentative de g. On précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

3. (a) Justifier que, pour tout réel t de $[0,1[$, la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} t^n$ converge.

   Quelle est sa somme ?

   On note, pour tout entier naturel n, $\quad R_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0,1[, \quad R_n(t)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k$$

   (b) Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0,1[$: $\quad R_n(t)=\dfrac{t^{n+1}}{1-t}$ et en déduire que, pour tout entier naturel n, R_n est continue sur $[0,1[$.

   (c) Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1[$:

$$\int\limits_0^x \frac{1}{1-t}dt=\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}+\int\limits_0^x R_n(t)dt$$

   (d) Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1[$:

$$0 \leqslant \int\limits_0^x R_n(t)dt \leqslant \frac{x}{(n+2)(1-x)}$$

   (e) Démontrer que, pour tout réel x de $[0,1[$, la série numérique $\sum\limits_{k \geqslant 0} \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ est convergente et que $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k+1}$.

4. (a) Montrer que, pour tout réel x de $[0,1]$, la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ est convergente.

On note, pour tout entier naturel n, $\rho_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$\forall t \in [0,1[, \quad \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1}$$

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n, ρ_n, est continue sur $[0,1[$.

(c) Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1[$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t)dt$$

(d) Démontrer. pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0,1[$:

$$0 \leqslant \rho_n(t) \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-t)}$$

(e) En déduire que, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0,1[$:

$$0 \leqslant \int_0^x \rho_n(t)dt \leqslant \frac{-\ln(1-x)}{n+2}$$

(f) Conclure que, pour tout réel x de $[0,1[$: $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.