

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2000

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème 1

Notations:

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3.
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I_n désigne la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. La transposée d'une matrice M est notée tM .
- \mathbb{R}^n est muni du produit scalaire canonique noté \langle, \rangle défini par: si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ alors, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$.

En notant les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et en confondant les matrices d'ordre 1 et les scalaires, on a alors $\langle x, y \rangle = {}^tXY$. La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\cdot\|$.

- $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^n .

On rappelle que la matrice de passage P d'une base orthonormale de \mathbb{R}^n à une autre base orthonormale de \mathbb{R}^n vérifie ${}^tP = P^{-1}$.

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I.

1. On considère les matrices suivantes de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Justifier que S est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
- Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$.

2. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

- (a) Vérifier que $(M - 2I_3)^3 = I_3$.
- (b) M est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$?
- (c) Calculer le produit tMM .

Partie II.

Soit A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n associé à la matrice A relativement à la base B et g l'endomorphisme de \mathbb{R}^n associé à la matrice tA relativement à la base B .

1. Montrer, pour tout x et tout y de \mathbb{R}^n : $\langle g(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle$ puis $\langle (g \circ f)(x), x \rangle = \|f(x)\|^2$.
2. Montrer que l'endomorphisme $g \circ f$ est symétrique.
3. Montrer que $g \circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
4. Justifier l'existence d'une base orthonormale $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de \mathbb{R}^n constituées de vecteurs propres de $g \circ f$.
On note Q la matrice de passage de la base B à la base B' .

5. Montrer l'existence de n réels positifs ou nuls $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (non nécessairement distincts) tels que la

matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tAA = Q\Delta^2{}^tQ$.

6. Montrer que la famille $(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n))$ est une famille orthogonale et que pour tout entier j de $\{1, 2, \dots, n\}$, $\|f(e'_j)\| = \lambda_j$.
7. Dans cette question, on suppose que A est inversible.
 - (a) Vérifier que les nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont tous non nuls.
 - (b) Montrer que la famille $C = \left(\frac{1}{\mu_1}f(e_1), \frac{1}{\mu_2}f(e_2), \dots, \frac{1}{\mu_n}f(e_n) \right)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^n .
 - (c) Soit R la matrice de passage de la base B à la base C . Montrer que $A = R\Delta{}^tQ$.

Partie III.

Déterminer deux matrices orthogonales Q et R d'ordre 3 et une matrice diagonale Δ d'ordre 3 telles que : $M = R\Delta{}^tQ$ où M est la matrice définie dans I.2.

Problème 2

Dans tout ce problème, a est un réel tel que $0 < a < 1$.

Calcul d'une somme et d'une intégrale.

1. Pour tout n de \mathbb{N}^\times et tout x de $[0, +\infty]$, on note: $C_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.

(a) Montrer, pour tout n de \mathbb{N}^\times et tout x de $[0, +\infty]$: $1 + 2C_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$.

(b) Etablir, pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$: $\sum_{k=-n}^n z^k = z^{-n} \frac{1 - z^{2n+1}}{1 - z}$.

(c) En déduire, pour tout n de \mathbb{N}^\times et tout x de $]0, +\infty]$: $\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

2. Soit n dans \mathbb{N}^\times . Montrer que l'intégrale $J_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx$ existe et calculer sa valeur.

On note $\omega : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $\omega(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos(ax) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0, +\infty] \end{cases}$

3. Montrer que ω est de classe C^1 sur $[0, +\infty]$ et calculer $\omega'(0)$.

4. On note, pour tout n de \mathbb{N}^\times : $I_n = \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$.

Montrer, grâce à une intégration par parties, que I_n tend vers 0 quand l'entier n tend vers l'infini.

Calcul de la somme d'une série.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^\times$: $u_n = \int_0^\pi \cos(ax) \cos(nx) dx$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(a\pi)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + J_n$.

2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, et calculer sa somme (on pourra utiliser les résultats de **I.2.** et **I.4.**).

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, u_n en fonction de a et de n .

4. Etablir : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n-a} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)} - \frac{1}{a}$.

Calcul d'une intégrale.

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

On note: $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$, $G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$, $H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

2. (a) Montrer, pour tout réel t de $[0, 1]$ et tout n de \mathbb{N} : $\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}$.

(b) Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

(c) En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{1+k\alpha}$ converge et que : $G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k\alpha}$

3. (a) En utilisant le changement de variable défini par $u = t^{1-\alpha}$, montrer :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right),$$

et en déduire

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}$$

(b) Etablir: $F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}$.

4. En utilisant le résultat de **II.4.**, établir finalement : $F(\alpha) = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$.