Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2001

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème 1

On note $I = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.
Le but du problème est la construction d'une application $f : I \mapsto \mathbb{R}$, continue et telle que:

$$\forall x \in I,\ f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f(t) + f(t^2))dt$$

On considère les applications $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$, définies par $f_0 = 1$ (application constante égale à 1) et:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2))dt$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application polynomiale.

   (b) Vérifier que, pour tout $x \in I$, $f_1(x) = 1 + x$ et $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}$, et calculer $f_3(x)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, la fonction continue $|f_n - f_{n-1}|$ admet une borne supérieure sur I.
   On note $D_n = \sup\limits_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$.

   (a) Calculer D_1 et D_2.

   (b) Montrer: $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall x \in I,\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}D_n$.

   On pourra étudier séparément les cas $x \in [0; \frac{1}{2}]$ et $x \in [-\frac{1}{2}; 0]$.

   (c) En déduire: $\forall n \in \mathbb{N}^\times,\ D_n \leqslant \frac{1}{2^n}$.

   (d) Établir la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} D_n$.

   En déduire que, pour tout x fixé dans I, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$ converge.

3. Établir que, pour tout x fixé dans I, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   On définit ainsi une application $f : I \mapsto \mathbb{R}$ par: $\forall x \in I, f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

   (a) Montrer: $\forall n \in \mathbb{N}^\times,\ M_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} M_{n-1}$.

   (b) Montrer: $\forall n \in \mathbb{N},\ M_n \leqslant 2$.

   (c) Établir: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in I^2,\ |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant 2\,|x-y|$.

5. (a) Établir: $\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant 2\,|x-y|$.

   (b) En déduire que f est continue sur I.

6. (a) Établir: $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall p \in \mathbb{N}^\times,\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\left(1 - \dfrac{1}{2^p}\right)$.

   (b) En déduire: $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^\times\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

7. En déduire: $\forall x \in I,\quad f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x (f(t) + f(t^2))dt$.

Problème 2

Rappel:
Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $z^n = 1$, d'inconnue z appartenant à $\mathbb{C}$, admet exactement n racines complexes distinctes qui sont

$$1,\ e^{i\theta},\ e^{2i\theta}, \ldots, e^{i(n-1)\theta} \qquad \text{avec} \qquad \theta = \frac{2\pi}{n}$$

Définitions:
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

- On note id_E l'application identique de E.
- Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = id_E$, et pour tout entier naturel k, $f_{k+1} = f_k \circ f$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^\times$. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes
  $$\begin{cases} * & f^p(x_0) = x_0, \\ \star & \text{la famille } (x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est génératrice de } E, \\ \star & \text{la famille } (x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est constituée d'éléments deux à deux distincts.} \end{cases}$$

  La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée un cycle de f.

Etude d'un exemple

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E et déterminer la matrice associée à f relativement à cette base.

2. Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f.

3. Montrer que $f^4 = id_E$.

4. Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p.
Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

1. Montrer : $p \geqslant n$.

2. Montrer que $f^p = id_E$. En déduire que f est bijective.

3. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$ est libre.

   (a) Montrer que $f_m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$

   (b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$

   (c) En déduire que $m = n$ et que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

4. On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que:

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$

   (a) On considère l'endomorphisme g de E défini par $g = a_0 id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.
   Montrer: $\forall k \in \mathbb{N},\ g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$.
   En déduire: $f^n = a_0 id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

   (b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

   (c) Montrer: $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{rg}(f - \lambda id_E) \geqslant n - 1$.
   En déduire que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

5. On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n (et $\dim(E) = n$). Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un cycle de f.

   (a) Montrer que si un nombre complexe λ est valeur propre de f, alors $\lambda^n = 1$.

   (b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

   (c) Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.