

# Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2002

## MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

---

### Problème 1

On note, pour tout entier  $p \geq 1$  :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt$$

et, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$a_n = \sum_{p=1}^n u_p = u_1 + \dots + u_n$$

#### Partie I : Étude de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$

1. Montrer, pour tout entier  $p \geq 1$  :  $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ .
2. En déduire que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est croissante et converge vers un réel, noté  $\gamma$ , tel que  $0 \leq \gamma \leq 1$ .

#### Partie II : Expression intégrale du réel $\gamma$ .

1. (a) Établir, pour tout réel  $x$  :  $1 + x \leq e^x$ .  
(b) En déduire, pour tout entier  $n \geq 1$  et tout réel  $t$  tel que  $0 \leq t \leq n$  :

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \text{ et } \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

puis : 
$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

2. (a) Établir, pour tout entier  $n \geq 1$  et tout réel  $x$  de  $[0; 1]$  :

$$(1 - x)^n + nx - 1 \geq 0$$

(b) En utilisant **1.b.** et **2.a.**, montrer, pour tout entier  $n \geq 1$  et tout réel  $t$  tel que  $0 \leq t \leq n$  :

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$$

3. (a) On note, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$I_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left( e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt.$$

Justifier l'existence de  $I_n$ .

(b) Établir que  $I_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

4. (a) Établir, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n(a_n + \ln(n+1))$$

On note, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$J_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left( 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt.$$

(b) Justifier l'existence de  $J_n$ , et montrer, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$J_n = a_n + \ln(n+1).$$

5. On note :  $U = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$  et  $V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ .

(a) Justifier l'existence de  $U$  et de  $V$ .

(b) Démontrer :  $\gamma = U - V$ .

## Problème 2

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ , dont le produit scalaire est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes  $u$  de  $E$  tels que :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

### Partie I : Étude d'un exemple

Dans cette partie,  $E$  est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que  $(1, X, X^2)$  est une base de  $E$ .

On considère l'application  $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $E$  par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Vérifier que  $\varphi$  est un produit scalaire.

*Dans cette première partie, on considère que  $E$  est muni de ce produit scalaire.*

2. On considère l'endomorphisme  $u$  de  $E$  défini pour tout  $P$  de  $E$  par :

$$u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X.$$

(a) Vérifier :  $\forall P \in E, 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$ .

(b) En déduire que  $u$  est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien  $E$ .

3. Soient  $P_1 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$  et  $P_2 = \frac{1}{2}u(P_1)$ .

(a) Vérifier que  $P_1$  est un vecteur propre de  $u^2$  et que la famille  $(P_1, P_2)$  est orthonormale.

(b) Déterminer une base de  $\ker u$ .

(c) Déterminer une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $E$  et un nombre réel  $a$  tels que la matrice associée à  $u$

relativement à cette base soit  $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

## Partie II : Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Pour tout couple  $(x, y)$  de  $E^2$ , développer  $\langle u(x + y), x + y \rangle$ .

En déduire que  $u$  est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

2. On suppose dans cette question que la dimension  $n$  de  $E$  est non nulle.

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ , et  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  la matrice associée à  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

(a) Montrer :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$ .

(b) En déduire que  $u$  est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice  $M$  associée à  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  vérifie  ${}^tM = -M$ .

## Partie III : Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

Soit  $u$  un endomorphisme antisymétrique non nul de  $E$ .

On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question **II.1**.

1. Soit  $\lambda$  un nombre réel. Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $u$ , alors  $\lambda = 0$ .

2. Montrer que  $\text{Im } u$  et  $\ker u$  sont orthogonaux et supplémentaires dans  $E$ .

En déduire que  $\ker u = \ker(u^2)$ .

3. Montrer que  $u^2$  est un endomorphisme symétrique de  $E$  et que toute valeur propre de  $u^2$  est négative ou nulle.

4. (a) Montrer que  $u^2$  admet au moins une valeur propre non nulle.

Soient  $x$  un vecteur propre de  $u^2$  associé à une valeur propre non nulle, et  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $(x, u(x))$ .

- (b) Montrer que  $F$  est un plan vectoriel stable par  $u$ .
- (c) Montrer que  $F^\perp$ , le supplémentaire orthogonal de  $F$ , est stable par  $u$ .
- (d) On munit  $F^\perp$  du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  défini pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $F^\perp$  par

$$\langle x, y \rangle_1 = \langle x, y \rangle$$

On définit l'endomorphisme  $u_1$  de  $F^\perp$  par :  $\forall x \in F^\perp, u_1(x) = u(x)$ .

Montrer que  $u_1$  est un endomorphisme antisymétrique de  $F^\perp$  et que  $\text{Im } u = F \oplus \text{Im } u_1$ .

- 5. Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de  $E$ .

## Partie IV : Application

Dans cette partie,  $E$  est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  est une base orthonormale de  $E$ .

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E$  associé, relativement à la base  $\mathcal{B}$ , à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

- 1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme antisymétrique de  $E$ .  
Vérifier que le vecteur  $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$  est vecteur propre de  $u^2$ .
- 2. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par la famille  $(f_1, u(f_1))$ . Déterminer une base orthonormale de  $F$  et une base orthonormale de  $F^\perp$ .
- 3. En déduire une base orthonormale  $\mathcal{B}_0$  de  $E$  et deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que la matrice associée

à  $u$  relativement à  $\mathcal{B}_0$  soit  $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ .