Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2003

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I. Première partie

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3 = A^2 + 2A$.

2. Montrer que la famille (A, A^2) est libre dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il esiste un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que : $A^n = a_n A + b_n A^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

4. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n donné supérieur ou égal à 1.

5. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$

   (b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

   (c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

II. Seconde partie

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est A.

1. Déterminer une base de $\Im(f)$ et donner la dimension de $\Im(f)$.

2. (a) Est-ce que f est diagonalisable ?

(b) Est-ce que f est bijectif ?

3. Déterminer les valeurs propres de f, et donner, pour chaque sous-espace propre de f, une base de ce sous-espace propre.

4. Déterminer une matrice diagonale D dont les termes diagonaux sont dans l'ordre réel croissant, et une matrice inversible P dont la troisième ligne est formée de termes tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.

5. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM + MA = 0$$

Exercice 2

On note $e = \exp(1)$, et $\mathbb{R}_+^\times =]0;+\infty[$.
On considère, pour tout nombre réel a non nul, l'application $f_a : \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times, \quad f_a(x,y) = \frac{xe^{-x}}{y} - \frac{y}{a}$$

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes entre elles.

I. Première partie

Dans cette première partie, on prend $a = -e$, et on note g à la place de f_{-e}. Ainsi, l'application $g : \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times, \quad g(x,y) = \frac{xe^{-x}}{y} + \frac{y}{e}$$

1. Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times$.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g en tout point (x,y) de $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times$.

3. Montrer qu'il existe un couple unique (x,y) de $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}_+^\times$ en lequel les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g s'annulent, et calculer ce couple.

4. Est-ce que g admet un extremum ?

II. Seconde partie

Dans cette seconde partie, on prend $a = 1$.
On considère, pout tout entier n tel que $n \geqslant 1$, l'application $h_n :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad h_n(x) = f_1(x, x^n) = \frac{xe^{-x}}{x^n} - x^n$$

et l'application $\varphi_n :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \varphi_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad h_n(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_n(x) = 0$$

(b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'équation $h_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée u_n, et que :

$$0 < u_n < 1$$

2. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $\ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$.

   (b) En déduire : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x\sqrt{x}}dx$ est convergente et calculer sa valeur.
   Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

2. Montrer que f définit une densité de probabilité.

3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de X.

   (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
   On considère trois variables aléatoires indépendantes T_1, T_2 et T_3, chacune de même loi que X.

4. On condidère la variable aléatoire $U = \inf(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (U > t) = (T_1 > t) \cap (T_2 > t) \cap (T_3 > t)$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition G de U.

   (b) Montrer que U admet une densité et déterminer une densité g de U.

   (c) Montrer que U admet une espérance et calculer $E(U)$.

5. On condidère la variable aléatoire $V = \sup(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (V \leqslant t) = (T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t) \cap (T_3 \leqslant t)$$

   (a) Déterminer la fonction de répartition H de V.

   (b) Montrer que V admet une densité et déterminer une densité h de V.

   (c) La variable aléatoire V admet-elle une espérance ?