Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2003

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème 1

On considère l'application $\varphi : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

et on considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^n dt, \qquad J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt, \qquad K_n = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^n dt$$

Partie I : Résultats généraux sur φ et J_n

1. Montrer que φ est continue sur $[0;+\infty[$ et que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale J_n existe.

2. (a) Montrer que φ est strictement positive sur $[0;1]$ et que φ est strictement décroissante sur $[0;1]$.
   (b) Établir, pour tout réel $t \in]0,+\infty[$: $\quad |\varphi(t)| < 1$.

3. (a) Montrer, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$: $\quad \varphi(t) \geqslant 1 - t$.
   (On pourra étudier les variations sur $[0;+\infty[$ de l'application $t \mapsto \sin t - t + t^2$).
   (b) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$: $\quad J_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Partie II : Étude de I_1

1. (a) Montrer, pour tout réel $x \in [1;+\infty[$: $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$.
   (b) En déduire que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes.

2. (a) Montrer, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$: $\quad |\sin t| \geqslant \sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2t))$.
   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

Partie III : Étude de I_n, pour $n \geqslant 2$

1. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale K_n est convergente.

   (b) Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$: $|K_n| \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

2. (a) Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

   (b) Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ converge; on note ℓ sa limite.

   (c) Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $a \in]0;1[$:

$$\int_0^a (\varphi(t))^n dt \leqslant a \text{ et } \int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leqslant (1-a)(\varphi(a))^n$$

   (On pourra utiliser I.2.).

   (d) En déduire, pour tout réel $a \in]0;1[$: $0 \leqslant \ell \leqslant a$ et conclure : $\ell = 0$.

3. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale I_n est convergente.

   (b) Établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Partie IV : Étude de la série de terme général I_n, $n \geqslant 2$

1. Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$: $K_{2p} + K_{2p+1} \geqslant 0$.

2. En déduire, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\sum_{p=1}^{N} (I_{2p} + I_{2p+1}) \geqslant \sum_{p=1}^{N} (J_{2p} + J_{2p+1})$$

3. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} I_n$ diverge. (On pourra utiliser I.3.b.).

Problème 2

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E est un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $< .,. >$ et la norme associée est notée $\|.\|$.. On note id_E l'application identique de E, et $\tilde{0}$ l'application nulle de E.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F dans E.
Le projecteur de E sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelé projecteur orthogonal sur F.
Pour tout endomorphisme f de E et toute valeur propre λ de f, on note $E_f(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

On considère un endomorphisme symétrique f de E, c'est-à-dire un endomorphisme f tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad < f(x), y > = < x, f(y) >$$

On suppose de plus que f est non inversible et non nul.

1. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au-moins une valeur propre non nulle.

2. (a) Soient λ et μ deux valeurs propres de f.
   Montrer, pour tout vecteur x de $E_f(\lambda)$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

$$\lambda < x, y >= \mu < x, y >$$

   (b) En déduire que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.
   On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ avec $k \geqslant 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|$.
   Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_j)$.

4. Soit x un vecteur de E.

   (a) Montrer qu'il existe un unique $(k+1)$-uplet $(x_0, x_1 \ldots, x_k)$ de $E_f(0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$.

   (b) Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, montrer : $p_j(x) = x_j$.
   Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$id_E = p_0 + p_1 + \cdots + p_k$$

5. (a) Etablir, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = \tilde{0}$$

   (b) Montrer : $\quad f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_k p_k$.

   (c) Montrer que le projecteur orthogonal p sur $\operatorname{Im} f$ vérifie :

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$$

   On note $f^\sharp$ l'endomorphisme de E défini par $f^\sharp = \dfrac{1}{\lambda_1} p_1 + \dfrac{1}{\lambda_2} p_2 + \cdots + \dfrac{1}{\lambda_k} p_k$.
   On dit que $f^\sharp$ est l'inverse généralisé de f.

6. (a) Montrer : $\quad f \circ f^\sharp = p$.

   (b) En déduire : $\quad \forall (x, y) \in E^2,\ \left(f(x) = p(y) \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \ker f\right)$.

7. Soit y un vecteur de E.

   (a) Montrer : $\quad \forall x \in E,\ \left(\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \ker f\right)$

   (b) En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant :

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\|$$

Partie II : Application à un exemple

Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de E associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.

2. Montrer que f admet exactement trois valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
   On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_1)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.
   On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_2)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Montrer : $\qquad A = 2M_1 + 4M_2$.

4. (a) Montrer que $E_f(\lambda_2)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de $E_f(\lambda_2)$ tel que $\|v_2\| = 1$.
   (b) Montrer : $\qquad \forall x \in E, \quad p_2(x) = <x, v_2> v_2$.
   (c) Déterminer la matrice M_2.

5. En déduire la matrice associée à $f^\sharp$ relativement à la base $\mathcal{B}$.